

# DIOPHANTI
## ALEXANDRINI

## Rerum Arithmeticarum
Libri ſex,
quorũ primi duo adiecta habent SCHOLIA,
MAXIMI (ut coniectura eſt)
Coll. Rom. PLANVDIS. Societ. Iesu Cat. inscrip.
Item LIBER DE NVMERIS POLYGONIS
ſeu Multiangulis.

*Opus incomparabile, ueræ Arithmeticæ Logiſticæ perfectionem continens, paucis adhuc uiſum.*

A' GVIL. XYLANDRO Auguſtano incredibili labore Latinè redditum, & COMMENTARIIS explanatum, inq; lucem editum,
AD
*Illuſtriſ. Principẽ* LVDOVICVM *Vuirtembergenſem.*







BASILEAE
PER EVSEBIVM EPISCOPIVM,
& NICOLAI Fr. hæredes.
M D LXXV.

# AD ILLVSTRISSIMVM AC SVMMAE EXSPECTATIONIS PRINCIPEM LVDOVICVM, VVIRTEMBERGICVM Teckiumq; ducem, comitem Montpelgardicum, &c.

*In* DIOPHANTI *Arithmetica à se latinè reddita, & tandem edita,*

GVILIELMI XYLANDRI
Augustani
PRAEFATIO.

OFFERIMVS *numeros, numeri sunt principe digni.* Liceat enim mihi apud te, Illustrissime ac Magnificentissime Princeps, hac uti parodia: cuius sententiam esse ueram, & pręsens testabitur ætas, & (si qua erit) posteritas. Non ego damnauerim eorum institutum, qui Principum, quibus suas lucubrationes consecrant, laudes prædicant, etiã ab atauorum atauis repetitas. Hoc mihi dabunt æqui, ut more meo mihi uti in dedicationib. liceat. Scilicet ego te & tuos, ac uestra illustria facta prædicem. quasi uel buccinatores gloriæ uestræ idonei desint, uel TVBINGA tua ranas alat seriphias, aut me anserem obturbare oloribus oporteat. Itaque huius argumenti tractationem, ne aliena inuadam, remitto ad eos quib. debetur. Hoc agamus. Tametsi non multum refert, ad tuam Illustrissime Princeps gloriam, quanti te ipse homuncio & litterator faciam: tamen mea interest, bonos scire quis in te obseruando sim, & quid me tibi debere fatear, tum quid à te exspectem, nullo meo admodum merito, sed uirtute fretus tua. Ergo quod adhuc facere sum solitus, citra adulationem & inanem rerum iactantiam tibi, Princeps Illustrissime, paucis explicabo, & cur te munere hoc meo condecorãdum existimauerim, & quid rei sit quod tibi offero: postremò quem hinc fructum exspectem. Ac primò quidem constat Deum, à quo habemus quidquid omnino habemus bo-

ni, nostræ gratitudini etiam ineffabilia præmia proposuisse. Et ueteres illi sapientes, inter quos Euripidem nequaquam ultimum colloco, quasi per nubes Lunam à coitu obseruantes, idipsum tamen utcunque contuiti testatum fecerunt, quando gaudio affici deos enunciârunt ob habitum eis ab hominibus honorem. Iam te, tuique similes, Dei in terra uicarios esse non nescis. Quo fit, ut adducar in spem certissimam, meam tibi pietatem, gratitudinem, studiumq; amplificandæ rei litterariæ, quod ad nominis tui gloriam, glorięque ad posteros etiam (si qui erunt) propagationem nonnihil cõducat, accepta fore. Itaque pergo. Egressum me è schola triuiali (ut loquar usitatè) Augustana, Tubinga tua excepit: cum quidem (est enim fatendum) quid rei esset philosophia, nondum cognouissem. Tubingæ quinquennium ferme integrum exegi: qua conditione, & quibus casibus iactatus, alio loco exponetur. Huc id propriè facit, quod ex animo fateor, & publicè constare uolo: meæ eruditionis adolescentiam & iuuentutem Tubingæ tuæ deberi, & quantulacunq; est illa, neque me eius pœnitet, neque (quod existimare possim) Tubingam Xylandri alumni sui piget aut pigere debet. Enimuerò quandoquidem ad te legitima successione aui patrisque tui, Principum laudatissimæ memoriæ, bona imperiumq; peruenerunt: non uideo, quid causæ excogitari possit, cur non & eorum clientes te patronum suum agnoscant. Tubingensia tua sunt, deriuata in te maiorum in Academia ea tutanda amplificandaque cura, quam te seriò suscepisse, & gnauiter prosequi accipimus. Ego qui Tubingæ tuæ permultum debeo, adhuc semper me in ære Illustrissimæ tuæ familiæ esse, non modò agnoui, sed etiam affirmaui. Ne quid alienum meo ingenio faciam: hoc est, ne uel aduler, uel simulem: planè & conceptis uerbis dicam quod res est, Gratias ego pro acceptis apud tuos beneficijs tibi ago, Princeps humanissime, quantas possum, meæque gratitudinis hoc publicum monimentum tibi demississimo obsequendi studio ac reuerentia consecro. quod quanti facere debeas, docti (quorum copia abundas) facilè tibi explicabunt. Dicam tamen ipse ea, quæ in mentem alijs uenire uix (puto) possunt. A' multis annis ego mathematicarum uerarum scientiarum

tiarum (Geometriam dico, Arithmeticā, & quæ propriè dicitur Cosmographiam) ita flagraui, ut docere etiam conarer alios ea, quæ discendi mihi necessitatem iniunxeram. Huius rei testimonia exstant in meis lucubrationibus, ijs præsertim, quas iniquitate temporum circumuentus absoluere, & edere nondum potui. Itaque cum apud Suidam de Arithmetica Diophanti aliquid obseruauissem commemoratum, amatores imitatus, adspectum saltem eius operis exoptaui. Inueni deinde tanquam exstantis in bibliothecis Italicis, sibiq́; uisi mentionem à Regiomontano, (cuius etiam nominis memoriam ueneror) factam. Sed cùm ederet nemo: cepi desideriū hoc paulatim in animo consopire, & eorum quos consequi poteram Arithmeticorum librorum cognitione, & meditationibus nostris sepelire. Veritatis porrò apud me est autoritas, ut ei coniunctum etiam cum dedecore meo testimoniū lubentissimè perhibeam. Quod Cossica seu Algebrica (cum his enim reliqua comparata, id sunt quod umbræ Homericę in Necya ad animam Tiresiæ) ea ergo quòd non assequebar modò, quanquam mutis duntaxat usus pręceptoribus cætera αὐτοδίδακτος, sed & augere, uariare, adeoq́; corrigere in loco didicissem, quæ summi & fidelissimi in docendo uiri Christifer Rodolphus Silesius, Micaelus Stifelius, Cardanus, Nonius, alijq́; litteris mandauerant: incidi in οἴησιν, ἱερὰν νόσον, ut scitè appellauit Heraclitus sapientior multis alijs philosophis, hoc est, in Arithmetica, & uera Logistica, putaui me esse aliquid: itaq́; de me passim etiam à multis, ijsque doctis uiris iudicatū fuit, me non de grege Arithmeticum esse. Verùm ubi primùm in Diophantea incidi: ita me recta ratio circumegit, ut flendúsne mihi ipsi anteà, an uerò ridendus fuissem, haud iniuria dubitauerim. Operæprecium est hoc loco & meam inscitiam inuulgare, & Diophātei operis, quod mihi nebulosam istam caliginem ab oculis detersit, immò eos in cœnum barbaricum defossos eleuauit & repurgauit, gustum aliquem exhibere. Surdorum ego numerorum tractationem ita tenebam, ut etiam addere aliorum inuentis aliquid non pœnitendum auderem. atque id quidem in rebus arithmeticis magnum aliquid habetur, & difficultas istarum rerum multos à mathematib. deterret. Quanto autem hoc est præclarius, in ijs pro-

blematis, quæ surdis etiam numeris uix posse uidentur explicari, rem eò deducere, ut quasi solum arithmeticum uertere iussi obsurdescant illi planè, & ne mentio quidem eorum in tractatione ingeniosissimarum quæstionũ admittatur. Tum illa rectanguli trianguli proprietas, cuius demonstratio Pythagoræ adscribitur, cui non uisa est mathematico diuina? At cum Diophanteis comparata considerationibus, rudimẽtũ uidebitur. nãdatis quibuscunq; duobus numeris, triãguli rectanguli latera dare, unde Thasus bonorũ mathematicorũ exsistit, quid nõ habet & facilitatis & subtilitatis? Itaq; adsentior Plutarcho nostro, grauissimo autori, q sacrificiũ illud Pythagoreũ non trianguli rectanguli laterum facultati excogitatæ, sed rationi, datis duabus figuris inæqualibus & dissimilibus figuram constituendi quæ alteri istarum æqualis, alteri similis exsistat, inuentæ accommodat, quod apud Euclidem libri sexti propos. 25. demonstratur. Taceo miras quadratorum aliorumque numerorum proprietates, & progressionum, aliaque sexcenta, quæ pręfationis modus excludit, & ex ipso sunt cognoscenda opere. Memini me aliquando legere, Leonardum quendam Pisanum de quadratis numeris scripsisse librum. non dubito, quin ex nostro transtulerit Diophanto. & ex eius libris, quos nunc edimus, immensum texi opus ac thesaurum id genus rerum arithmeticarum, uel nostri commentarij esse argumento poterunt. Sanè tredecim libri Arithmeticæ Diophanti ab alijs perhibentur exstare in bibliotheca Vaticana: quos Regiomontanus ille uiderit. Sed de ijs neque quod sperem habeo, neque quod iudicem. Nostri sunt sex de rebus arithmeticis, quorum duo primi scholia Græca habent adiecta, quæ Maximi Planudis esse creduntur. & probabilius id mihi eo fit, quòd sub eius nomine quædam logistica codici sunt adiecta, quo nos usi sumus. Non sum nescius Hypateiam philosopham Alexandrinam in Diophantum esse commentatam. Sed profectò si ea tanta fuit, quantam Suidas & alij perhibent, istæ annotationes eam autorem non agnoscunt. de quibus quid senserim, meo more liberè dixi suis locis. Reliqui quatuor, & alius de numeris multiangulis inscriptus, scholijs carẽt. quod æquissimo animo & nos tulimus, & lector feret, cui nostris in

eos

eos commētarijs uti licebit. Id uerò mihi accidit durū & uix-superabile incōmodum, quòd mirificè deprauata omnia inueni, cùm neq; ꝓblematū expositio interdū integra esset, ac passim numeri (in quibus sita omnia esse in hoc argumento, quis ignorat?) tam problematū quàm solutionū siue explicationū corruptissimi. Non pudebit me ingenuè fateri, qualem me heic gesserim. Audacter, & summo cum feruore potius quàm alacritate animi opus ipsum initio sum aggressus, laborq; mihi omnis uoluptati fuit. tātus est meus rerū arithmeticarū amor. quin & gratiā magnā me apud omnes liberaliū scientiarum amatores ac patronos initurum, & præclarè de rep. litteraria meriturum intelligebam, eamq; rem mihi laudi (quam à bonis profectam nemo prudens aspernatur) gloriæq;, fortasse etiam emolumento fore sperabam. Progressus aliquantulum, in salebras incidi: quæ tantum abest ut alacritatē meam retuderint, ut etiā animos mihi addiderint. neq; enim mihi nouū aut insolens est aduersus librariorū incuriā certamen, & hac in re militaui, (ut Horatij nostri uerbis utar) non sine gloria. qđ me nō arrogāter dicere, Dio, Plutarchus, Strabo, Stephanusq; nostri testantur. Sed cum mox in ipsum pelagus monstris scatens me cursus abripuit: non despondi equidem animum, neque manus dedi, sed tamen sæpius ad orā unde soluissem respexi, quàm portum in quem esset euadendum cogitando prospicerem, depræhendiq; non minus uerè quàm eleganter ea cecinisse Alcęum, quæ (si possum) Latinè in hac quasi uotiua mea tabula scribam.

*Qui uela uentis uult dare, dum licet,*
*Cautus futuri præuideat modum*
*Cursus. mare ingressus, marino*
*Nauiget arbitrio necesse est.*

Sanè qđ de Echeneide pisce fertur, eū nauim cui se adplicet remorari, pœnè credibile fecit mihi mea cymba tot mēdorū remoris retardata. Expediui tamē me ita, ut facilè omnes mediocri de his rebus iudicio prædití, intellecturi sint incredibilē me laborē & ęrumnas difficilimas superasse: pudore etiam stimulatū oneris quod ultrò mihi imposuissem, nō perferēdi. Paucula quędā non planè explicata, studio & certis de causis in alium locum reiecimus. Opus quidem ipsum ita absolui-

mus, ut neque eius nos pudere debeat, & Arithmeticæ Logisticesque studiosi nobis se plurimum debere sint haud dubiè professuri. Neq; prætereundum est qua occasione atq; unde Diophantei codicis copiam sim consecutus. Cum mense Octobri, anni à repræsentato seruatore mūdi CIↃ IↃ LXXI. Vuittebergam uenissem, singularem eius nobilissimæ Academiæ in me humanitatem expertus, quam hìc non est locus prædicandi, neq; satis pro merito potest prædicari: inter alia in colloquium de reb. mathematicis ueni cū clarissimis ac doctissimis uiris, summis mathematicis D. Sebastiano Theodorico, & M. Vuolfgango Schulero, quos honoris causa & obseruantiæ nomino. Ibi mihi aliquot ij paginas Diophanti Græcas inspiciendas dederunt, non dissimulato eius, ad quem is codex pertineret nomine. Is est amplissimus uir, summo apud Polonos loco natus, uirtute, doctrina humanitateq; inter populares suos facilè princeps, Andreas Dudicius Sbardellatus, hoc tempore Imperatoris Romanorum apud Polonos orator, quē, ut ipsius amplitudo, inq; remp. litterariam merita postulant, honorificentissimè nominatū uolo. Ei ego iā antè à studio & peritia arithmeticæ ita fuerā cōmendatus, ut mutuas etiā de isto argumēto litteras dederimus acceperimusq;: & summopere fui ab eo, tāto uiro, in harū studio rerū confirmatus. Vitteberga proficiscēs, unū problema Diophāteum exscripsi, quo me in itinere oblectarē. cuius cū explicationē perscripsissem, Lipsiæ id Simoni Simonio Lucensi, philosopho doctissimo & acutissimo, ac medico eximio, q̃ mandato Illustrissimi Augusti Saxoniæ electoris, &c. ibi docet, & humanissimè me hospitio suo exceptū habuit, ostēdi, simulq; exposui, me si ita Dudicio uideretur, Latinā istā Diophanti arithmeticā facturū. placuitq;, ut ad eū de isto negocio scriberemus. Paucis pòst mēsib. Dudicius ad me Diophātum misit, meq; ut promissa implerē, maiorē in modū cohortatus est. cuius ego nō modò libēter autoritatē sum secutus, sed liberalitatē ipsius hāc, quòd mea opera Diophantū reip. litterariæ donauit, ut facinus uerè heroicū, ac magnificū tanti æstimo, æstimatūq; iri & abs te Illustrissime Princeps, & ab omnibus alijs rerū intelligentib. arbitror, ut nō minori, sed maiori etiā gloriæ ei hæc donatio, quàm mihi ipsi elucubratio sit futura.

Neq;

Neq; exigua debetur clarissimo Simonio gratia, qui autor ac suasor Dudicio fuit mittendi ad nos sui Diophanti. Tibi uerò, Illustrissime Princeps, etsi ea diuinitus obtigerunt, ut ad ueram solidamque gloriam tibi à meæ conditionis hominibus nulla sit optanda aut speranda gloriæ accessio, aut nominis amplificatio; non debes tamē huius nostri Operis patrocinium à tua maiestate alienum eaúe indignum putare. Habes tu quidem TVBINGAE præcipuè, tum ditionis tuę alijs etiam in locis uiros doctrina illustres: habes, ut unum loco omnium appellem, D. Iacobum Scheckium, principem huius sęculi philosophorum, præceptorem meum, & cui merito ipsius, idq; candidè, quidquid in Aristotelea profeci philosophia (quantulumcunq; id sit, non omnino tamen pœnitendum) acceptum refero. qui uir uel solus ornando Principi & patriæ sufficere poterat. Non tamen ideò nostrum tuę Amplitudini debet sordere studium, neq; nos uel alieni prorsus, uel inepti planè ad celebrarionem inclyti nominis tui existimandi sumus. Res quidem quæ hoc nostro opere tractatur, tanta est, ut eius dignitas omnem superet orationem. Est enim Arithmetica omnium mathematicarum scientiarū, quas Xenocratem summum illum & seuerissimum philosophum ansas sapientiæ appellasse legimus, dux & interpres, à qua in humanæ uitæ usus quæ & quanta propagentur adiumenta, etiam uulgo non est obscurum. Verùm alio loco à nobis mathematicarum scientiarum dignitas, utilitas, & necessitas est copiosè demonstrata, & ignauorum, ingratorumq; calumniæ refutatæ. neque conuenit, Tuam Celsitudinem à me prolixiore oratione detineri. Quem autem ego fructum huius mei & operis & facti sperem, paucis aperiam. Aliter me sperare auita tua indoles, uirtus, & humanitas non sinunt, quàm hoc litterarium munus tibi fore acceptissimum, teq; pro tua bonitate & liberalitate haud grauatè eius tutelam suscepturum, & nos in tuorum clientum numerum benignè adscripturum. Hoc non modò tibi Princeps Illustrissime, honorificum erit, atque gloriosum: sed te labores nostros approbante, arithmeticæ studium cùm alibi, tum in tua Academia & Gymnasijs, excitabitur, cōfirmabitur, prouehetur, & ad perfectam eius scientiam multi tuis auspicijs, nostro labore

bore perducti, magnam hac re tuis in remp. beneficijs accessionem factam esse gratissima commemoratione prædicabunt. Deum ex animo precor, ut illustrissimam tuam Celsitudinem, spiritu suo gubernet, omniaq; prospera largiatur, & sub umbra alarum suarum te ac tuos perpetuò protegat. Vale. Heidelbergæ. postrid. Eidus Sextiles.

CIƆ IƆ LXXIV.

*T. Illustriß. Celsit.*

*Obseruantißimus*

*M. Guilielmus Xylander Augustanus, publicus philosophiæ Aristoteleæ in schola Heidelbergensi doctor.*

# DIOPHANTI ALEXANDRINI RERVM ARITHMETICARVM LIBER PRIMVS,

*Guilielmo Xylandro Augustano interprete.*



VM animaduerterem te,obseruandissime mihi Dionysi,studio discēdi explicationem quæstionum earum quæ in numeris proponuntur teneri; aggressus sum eius rei uiā rationemq; fabricari; ex ipsisq; fundamentis,quibus tota res nititur, initio petito naturam ac uim numerorum constituere. Quod negocium ut uideatur fortasse difficilius (quippe ignotum adhuc)cùm animi incipientium ad bonam de re dextrè conficiē da spem concipiendum nequaquam sint procliues : tamen cùm tua alacritas, tum mea demonstratio efficiet,ut facilè id cōpræhendas.celeriter enim addiscunt,quorum ad discendi cupiditatem doctrina accedit. Verùm etiam præter hæc,intelligē ti tibi omnes numeros compositos esse è quadā unitatum multitudine: liquet eorum in infinitū progredi naturā. . Iam cùm in his quidam sint quadrati, qui fiūt numero aliquo in se multiplicato, qui numerus latus quadrati dicitur;aliqui cubi,qui exsistunt quadratis in sua multiplicatis latera; alij rursus quadratoquadrati, qui gignuntur quadratis in seipsos ductis; nonnulli quadratocubi, quos quadrata in cubos ab eodem profectos latere multiplicata procreant; quidā denique cubocubi,qui cubis in seipsos ductis nascuntur: usu uenit, ut ex horum uel compositione, uel quo præstant alij alijs, uel multiplicatione uel ratione inter se,aut uniuscuiusq; singulorum'ue ad sua latera, plurimæ nectātur arithmeticæ quęstiones,quæ soluantur tamen,si ea quam commonstrabimus uia incedas.

SCHOLION.

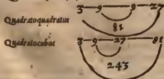
*Exemplo sit numerus 3.Quadratus 9. Nam 3. in se multiplicatus hunc facit: & 3. est latus quadrati 9. Cubus est 27.nam 3.in quadratum à se procreatum multiplicatus, gignit 27. Quadratoquadratum est 81. nam 9. quadratus in seipsum (quod idem est ac si dicas 3.numerus in cubum 27.)ductus eum producit. Quadratocubus est 243.quippe 9.quadratus in cubum 27.(idem est si dicas numerus 3.in quadratoquadratum 81. ) multiplicatus eum conficit. Cubocubus est 729.nam cubus 27.in seipsum(idem est si dicas quadratus 9.in quadratoquadratum 81.uel 3.numerus in quadratocubum 243.)multiplicatus eum procreat.*

Statutum porrò receptumq; est, ut quisque horum numerorum breuiorem nactus denominationem,pro elemento arithmeticæ considerationis habeatur. Appellatur ergo quadratus Facultas:nota eius Q. quæ cuiuis quadrato nūmero uel suprascribitur uel adscribitur; quod de alijs omnibus notis intelligi uolo. Cubo suū nomen est,nota C. Qui quadrato in se multiplicato fit, Quadratoquadratum dicitur,nota eius Q Q. Qui fit quadrato in cubum, qui ab eodem latere est profectus, ducto, Quadratocubus nominatur: nota eius Q C. Qui ex cubo in se ducto nascitur,Cubocubus uocetur:nota eius CC. Cui nulla harū proprietatū obtigit,sed cōstat multitudine unitatum,Rationis expers uocatur: nota eius N. Est & aliud signū immutabile definitorum,unitas:nota eius sit V.

SCHOLION.

| *Horum hæc est expositio.* | N. | Q. | C. | Q Q. | Q C. | C C. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3. | 9. | 27. | 81. | 243. | 729. |

*Quadratum porrò sic fit* $\frac{3 \text{—} 3}{9}$. *cubus* $\frac{3 \text{—} 9}{27}$.






*De his numeris simplices sunt, quod ad nomen attinet, N. Q. & C. compositi QQ, QC. & CC. Ac simplicibus quidem vel in seipsos, vel invicem, vel in compositos multiplicatis, cùm simplices tum compositi producuntur numeri. Verbi gratia 3. numerus in se ductus, simplicem ducit 9. Q. & in hunc simplicem ductus, 27 C gignit simplicem. rursus in hunc, procreat 81 QQ. compositum videlicet. idem in alijs deprehendere licet. Atq; haec est simplicium ratio. At verò compositi neq; in se neq; in alios multiplicati numeros quorum exstet nomen producunt. Etsi enim 81. QQ. compositum in seipsum multiplicans 6561. produco: tamen huic numero aliud quod tribuam nomen haud habeo, nisi quod ipsum quoq; Quadratoquadratum appello. heic enim 81, accipio pro quadrato, 9. pro numero. atq; eadem est reliquorum conditio.*

Enimuero sicut partes totius unius alicuius certæ à numeris certis suam habent denominationem, iisq; sunt cognomines: (etenim à ternario triens, à quaternario quadrans, ab alijs numeris aliæ totius partes suum nomen ducunt) ita nunc quoq; denominatis numeris idem congruit, ut ab ipsorum denominatione partis quoq; nomẽ deriuetur. numeri scilicet à numero, quadrati à quadrato, cubi à cubo, quadratoquadrati à quadratiquadrato, quadraticubi à quadraticubo, cubocubi à cubocubo. Harum partium adijciatur cuiusque numero nota, quæ speciem a specie distinguat.

SCHOLION.

*Numerus in exemplo suprà proposito fuit 3. Ergo triens unitatis, quod scribitur $\frac{1}{3}$. pars erit ab ipso numero nomen deducens, idemq; de alijs deinceps sentiendum est. Nona unitatis pars, $\frac{1}{9}$. à quadrato, qui est 9. suam denominationem trahet. unitatis pars vigesimaseptima, $\frac{1}{27}$. à cubo 27, denominabitur. octogesimaprima unitatis pars, $\frac{1}{81}$. à quadratiquadrato 81. unitatis pars ducẽtesimaquadragesimatertia, $\frac{1}{243}$. à quadratocubo 243. pars unitatis septingentesima undetrigesima, $\frac{1}{729}$. à cubocubo 729.*

XYLANDRI.

*Locus hic Latinè non potest exprimi, ut verba verbis consentiant. Sed hæc est Diophanti sententia. Unitas, quatenus totum & συνόλον intelligitur, non στιγμὴ ἀδιαίρετος (qua de re alio loco disserui copiosius) partes habet certorum numerorum cognomines. puta, sextans à senario numero nomen habet, triens à ternario, &c. Ita etiam certæ partes (minutias, fractionesue appellant) unitatis physicæ huius, à quadrato, cubo, reliquis denominationem accipiunt. Nam $\frac{1}{27}$. minutia est cubica, cùm 27. sit cubus & in Algebrico opere sæpissimè huiusmodi minutiarum est maximus usus: ut suis locis patebit. Cætera ante primi problematis tractationem illustrantur omnia in mea Algebra. quod hic, obscuritas ne quem deterreret, obiter monẽdum Lectorẽ duxi. In Græco pro παρεμβοίως lege παρωνύμως.*

Proinde cùm tibi singulas numerorũ denominationes exposuerim, ad earũ multiplicationes me confero, quę tibi facilè patebunt, cùm per ipsam nominum impositionem ferè sint iam antè declaratę. Ergo numerus in numerũ multiplicatus, quadratum producit, in quadratum, cubum: in cubum, quadratoquadratum: in hunc, quadratocubum: inq; hunc ductus, cubocubum. Quadratum in quadratum si multiplices, gignetur quadratoquadratus: si in cubum, quadratocubum: si in quadratoquadratum, cubicubũ. Cubus in cubum ductus, cubicubum producit.

Multiplicatio numerorũ denominatorũ.

SCHOLIA.

*Numerus in numerum ductus, quadratum efficit. Ut 3. in se, 9.*
*Numerus in quadratum, cubum procreat. ut 3 in 9, 27.*
*Numerus in cubum, quadratiquadratum: ut 3 in 27, 81.*
*Numerus in QQ, producit QC. ut 3 in 81, 243.*
*Numerus in QC, producit CC. ut 3 in 243, 729.*
*Q in Q multiplicatus, gignit QQ. ut 9 in se, 81.*
*Q in C. mult. gignit QC. ut 9. in 27, 243.*
*Q in QQ multipli. gignit CC. ut 9 in 81, 729.*
*C in C multipl. gignit CC. ut 27 in se, 729.*

*Sciendum hoc loco, non quemuis numerum in quemuis numerum, quadratum, cubumue esse multiplicandum, ut alia numeri forma existat: sed si N in N, aut Q in Q, inter se scilicet, multiplices. Alioqui si numerum 4 in alium numerum, utpote 5, ducas, non quadratus, sed simpliciter numerus creabitur 20. Item si 9 Q. multiplices per 16 Q. non quadratiquadratus, sed simpliciter quadratum fiet 144, cuius latus 12. Quando autem aliam speciem in aliam voles multiplicare, ea in ortam ab eodem numero ducenda est. puta numerus in quadratum aut cubum, vel rursus Q*

stus Q in C aut Q Q. Nam si 3. numerum in 9 quadratum ab eo procreatum ducas, cubus exsistet 27. non item, in alium quadratum. nam si 3 in 4 quadratum multiplices, 12 producetur, qui cubus non est. Item si 9 Q in C ab eodem ortum numero ducas, fiet QC 243. si in alium, non item: nam si in binarij cubum, qui est 8, ducas, exsistet 72, qui cubus non est. Ergo quiuis numerus in quemuis multiplicatus, omnino numerum procreat: in seipsum uerò, aut sui multiplices, qui denominationem cum quadratis ab unitate progredientibus communem habeant, quadratum. Nam cum ab unitate progredientes ordine quadrati numeri sint, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 ac deinceps: & unitas æqualitatis rationem obtineat, propter unitatem, utpote primum quadratum, omnis numerus in sui æqualem ductus, quadratum gignit. ut 2 in 2, 4. propter secundum autem quadratum, qui est 4, omnis numerus in quadruplum sui multiplicatus, quadratum procreat. ut 2. in 8, 16. propter tertium, nimirum 9, omnis numerus in nonecuplum suum ductus, quadratum producit, ut 2 in 18, 36. & sic deinceps. Similiter quiuis numerus nullum alium in quadratum multiplicatus, unquam cubum producet, nisi in eum duntaxat, qui ab ipso est ortus. Sic 2 in 4 quadratum suum ductus, cubum 8 procreat, & 3 in Q suum 9. facit C 27. itaq; deinceps reliqui. Itidem quiuis numerus in solum à se propagatum cubum ductus, quadratiquadratum gignit, ut 3 in 27 facit 81. rursumq; in solum eum cuius ipse latus est quadratiquadratum ductus, quadratocubum efficit, ut 3 in 81 facit 243. ac rursus in solum à se ortum quadraticubum multiplicatus, cubocubum producit, ut 3 in 243, facit 729. neq; ullo modo aliter fiet. Quadratus porrò quiuis in quemuis quadratum ductus, quadratum gignit: in seipsum uerò, etiam quadratiquadratum, 4 nempe in 9, facit 36. & in 16, 64: itemq; 9 in 16, 144, productis ubique quadratis. sed 4 in se, facit 16: & 9 in se, 81, qui sunt Q Q. Quiuis quadratus in solum ab eodem propagatum latere cubum ductus, QC producit. ut 9 in 27 facit 243. & in solum ab eodem latere productum Q Q ductus, CC facit. ut 9 in 81 facit 729. Omnis cubus in cubum ductus, cubum gignit: in se uerò, etiam cubicubum. nam 8 C in 27 C, procreat 216 C, cuius latus 6. idem 8 in 64 (cubum lateris 4) 512 facit, cubum cuius latus 8. In se uerò ducti cubus 8 facit CC 64, C 27 facit 729 CC. Atq; hi quidem CC omnes etiam sunt quadrati: non item ij cubi, qui tantùm C in C ducto fiunt. Præterea id quoq; sciendum est, dictorum numerorum quosdam in diuersis formis spectari. Verbi gratia 16 & numerus est, siquidem ex eo quadratū procreare licet: & quadratus est lateris 4, & quadratiquadratus lateris 2. Insuper 64 ipse quoq; numerus est, utpote latus quadrati sui. Est & quadratus lateris 8, & cubus lateris 4, & cubicubus lateris 2. Huius rei descriptio proponatur numerorum usq; ad denarium, ordine à superioribus ad inferiora descensu facto. ita quiuis numerorum sub se habebit species ex se propagatas.

| N. | 1 | 2 | 3 | . 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | N. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Q | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | Q |
| C | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 1030 | C |
| QQ | 1 | 16 | 81 | 256 | 625 | 1296 | 2401 | 4096 | 6561 | 10000 | QQ |
| QC | 1 | 32 | 243 | 1024 | 3125 | 7776 | 16807 | 32768 | 59049 | 100000 | QC |
| CC | 1 | 64 | 729 | 4069 | 15625 | 46656 | 117649 | 262144 | 531441 | 1000000 | CC |

Verùm Facultates omnes esse quadratos numeros, patet. De cubis, qui nascuntur cubis in seipsos ductis, quadrati possunt esse etiam ipsi: reliqui nequaquam. Quadratoquadrati omnes possunt esse quadrati. fiunt enim quadratis in seipsos multiplicatis. Quadratocubi, sicut & cubi, quicūq; enim simpliciter sunt quadratocubi, ut 32, ut 243, ut 776, non possunt etiam quadrati esse. qui uerò procreati sunt simpliciter QC in se multiplicatis, quadrati etiā esse possunt: ut 1024. & 59049. quorum ille 32, hic 243 in se ductis gignuntur. Cubicubi omnes possunt quadrati esse, cum fiant cubis in seipsos multiplicatis. Id quoq; in descriptione proposita est obseruandum, quòd species singulis numeris subiectæ secundum pariter parium seriem progrediuntur. nam tametsi non omnes sunt pares: tamē quales sunt numeri, tales etiam secundum imparis & paris rationem sunt quæ ex ijs propagantur species. Itaque unitas, cùm æqualitati ratione respondeat: species etiam ei subiectæ unitatem seruant. Binario autem subijcitur 4, duplus eius; huic 8, & huic 16, ac deinceps reliqui semper superiorum dupli. Rursus ternario subijcitur 9 triplus, huic 27, & ei 81, ac sic deinceps in tripla omnes ratione. Atq; ita porrò reliqui totuplices habent sub se suos numeros ordine, quot unitatum quisq; est. 4 scilicet quadruplices, 5 quintuplices, ac sic deinceps.

Omnis numerus in partem sibi cognominem multiplicatus, unitatem producit.

SCHOLION.

Esto numerus 4, pars ab eo nomen habens, quadrans $\frac{1}{4}$. Si ergo multiplices 4 in $\frac{1}{4}$, producetur 1. nam quadrās quater sumtus, unitatem conficit. quippe in quadrantes unitas secata, non in plures quatuor secabitur: & si in quintantes, non in plures quàm quinq;. ac sic deinceps. Quod ut etiam in descriptione appareat, ducantur duæ rectæ ad

*angulum rectum altera alteri iuncta a b & a c, quarum utraque sit unitatum seu punctorum 3, sintq; in suas unitates sectæ in punctis e. f. g. h. describaturq; super eas quadratum a b c d: & à punctis e atque f paralleli aduersus lineam a o ducantur e k & f l: itemq; à punctis g h paralleli uersus lineam a b ducantur g m & h n. Liquet ergo, totum quadratum unitatibus constare: & harum superficierum a k, k f, f d quamlibet continere tres unitates. Iam lineæ a e triens accipiatur, sitq; is a o, & à puncto o parallelus lateri a c ducatur o p. eritq; a p superficies triens superficiei a k: siquidem a o triens erat lineæ a e, unde superficies a k constabat, & cum tota superficies a k tribus unitatibus constet: utiq; a p eius triens, una constabit unitate. demonstratumq; est, a c tribus constantem unitatibus, in a o trientem unitatis multiplicatam, unitatem fecisse. Estq; triens denominatus à trib. unitatibus. In uniuersum autem quæuis pars numerum in quem multiplicatur, communicata denominatione diuidit: sicut hic triens ternarium in tres partes diuidebat, eiusq; trientem, scilicet unitatem, sibi sumebat. Quod si a o non triens, sed semißis (si ita usu uenisset) lineæ a e fuisset: in duo diuisisset ternarium: sumta ab eo denominatione. dimidiũ enim etiam à binario nomen ducit, cùm duo semisses unitatem impleant. Sic ergo a p continuisset unitatis sesquiplum 1 $\frac{1}{2}$. Si uerò a o fuisset sextans lineæ a e: profectò ternarium diuisisset in sex partes ipsi portioni cognomines, fuissetq; a p tertia pars de semisse unitatis.*

Enimuerò cùm unitas immutabilis sit, semperq; perduret, species numeri quę in eam multiplicatur, suam semper naturam retinet.

SCHOLION.

*Hoc dicit, unitatem eundem numerum, in quemcunq; ducatur, restituere, ut si numerum 3 in unitatem multiplices: dices, semel 3 sunt tria. uides reponi ternarium. quod idem de quouis numero est intelligendum. Sed & huius rei descriptionem proponamus. Ad punctum a duæ rectæ lineæ angulum rectum conficientes sunto a b & a c. hæc unius, illa trium punctorum siue unitatum. & describatur rectangulum parallelogrammum ab iis contentũ a b c d. idipsum quoq; pronuncio tribus unitatib. cõstare. Partiamur enim lineam a b in suas unitates, in punctis e & f, atq; ex his ducantur lineæ paralleli respectu a c lineæ, puta e g & f h. Quando itaq; a e unicam modò continet unitatẽ, itemq; a c tantundem: utiq; tota superficies a g unius erit unitatis. Vnitas enim in unitatem ducta, unitatem gignit. Iisdem de caussis etiam e h & h b superficies, utraq; unius est unitatis. ac proinde totũ parallelogrammũ a b c d è tribus constat unitatibus. quod fuit demonstrandum.*

Numerorum uerò aliquotæ partes à totis denominatæ, in se ipsas si multiplicantur, portiones producunt ipsorum numerorum cognomines.

SCHOLION.

*Partes numeris cognomines, binario semißis (neq; enim duentem licet dicere) ternario triens, quaternario quadrans, ac deinceps. Non autem dico trientem cuiuscunq; numeri, puta ternarij, aut quadrantem quaternarij: id enim esset unitas. sed unitatis intelligo trientem aut quadrantem, qui omnino numero alicui cognominis est. nam unitatis triens cognominis est ternario, quadrans quaternario. & sic deinceps.*

Verbi gratia, numeri aliquota pars in aliquotam numeri multiplicata, aliquotã quadrati: in hanc, aliquotam cubi: in hanc, quadratoquadrati: in hanc quadratocubi: in hanc, cubocubi aliquotam partem producit. idq; cõmunicata denominatione cõtinget. Quadrati aũt aliquota pars in numeri aliquotam partẽ ducta, cubi gignit aliquotam partem: in quadrati, quadratoquadraticam: in cubi, quadratocubicam: in quadratoquadrati, cubocubicam aliquotã aliquam partem. Cubi aliquota pars in aliquotam numeri partẽ multiplicata, aliquotã quadratoquadraticam: in quadrati, quadratocubicam: in cubi, cubicubicã. Quadratoquadrati aliquota pars in numeri aliquotam ducta, quadratocubicam: in quadrati, cubocubicam aliquotã partẽ ꝓducit. Quadratocubi aliquota pars in numeri aliquotã ducta, cubocubicã.

SCHOLION.

*Hæc eadem sunt cum illo: Numerus quiuis in partem sibi cognominem ductus unitatem gignit.*

ALIVD.

*Numeri, inquit, aliquota pars in aliquotam numeri ducta, quadrati aliquotam partem producit. hoc est $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{3}$ facit $\frac{1}{9}$. siue, triens trientis, nona pars unitatis est. Et numeri aliquota pars in aliquotam quadrati ducta, cubicã aliquotam procreat: id est $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{9}$ facit $\frac{1}{27}$. uel, triẽs nonæ partis est 27. Sicut enim in numeris 3 in 3 multiplicatus 9: & 3 in 9 ductus 27 producebat, ita res habet in unitatis partibus horũ cognominib. Sic & quadrati aliquota pars*

in sui

*in sui similem, quadratoquadraticam producit. hoc est, $\frac{1}{9}$ in $\frac{1}{9}$ ducta, $\frac{1}{81}$ facit. seu nonæ partis nona pars, octogesimauna est. nam 9 in 9 ducta, 81 faciebãt. Hoc quoq; descriptiõe declaretur. Sint duæ rectæ ad angulũ rectũ iunctæ a b & a c, utraq; unius unitatis, & describatur super eas quadratũ. a b c d, quod ipsum quoq; unitatem continebit. Porrò utraq; linearum diuidatur in tres trientes, a b nimirũ in a e, e f, f b: a c in a g, g h, & h c. ducanturq; à punctis e & f lineæ paralleli aduersus lineã a c, quæ sint e k & f l: necnon à punctis g & h paralleli aduersus lineam a b, uidelicet g m & h n: secetq; linea e k lineam g m in puncto o. Quando igitur unitas a b in tres trientes est diuisa; quæuis harũ superficierum a k, k f, f d, triens unitatis erit. totum enim quadratum a b c d unitate una constabat. At rursus earum quælibet à lineis g m & h n in tres diuisa est triẽtes: ergo etiam a h. & cũ hæc tota sit unitatis triens, erit a o trientis triens, quod est pars nona: demonstratũq; est, quo pacto numeri pars aliquota in numeri partem, nempe a e triens in trientẽ a g, ducta, quadrati aliquotam partem a o fecerit, nonam unitatis. totum enim quadratũ a b c d, q. una cõstat unitate, partes habet nouẽ tales, qualium una est a o. Similiter etiam si a g maneat aliquota pars numeri, seu triens unitatis, a e aũt ponamus aliquotam quadrati partẽ, puta nonã partẽ lineæ a b: erit a o aliquota pars cubica, nimirũ 27. pars totius quadrati a b c d. Et si utranq; a g & a e posuissemus quadrati aliquotã partẽ, a g nonã ex a c, & a e nonã de a b: a o quadratoquadratica pars fuisset, nimirum $\frac{1}{81}$ totius quadrati a b c d, unius unitatis. Eadem est cæterorum ratio. Verùm hæc multiplicatio nõ est utcunq; instituenda. nõ enim quæuis numeri pars in quãuis numeri aut quadrati aliquotã partẽ ducẽda est, ut quadrati cubiue aliquota pars procreetur. sed sicut de numeris, quadratis, reliquisq; præceptum fuit, numeri pars in sibi æqualẽ. i. in seipsam est multiplicãda, $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{3}$, ut fiat $\frac{1}{9}$. & eadem in partem quadrati ab ipsa ortam, hoc est in $\frac{1}{9}$ ducenda est, ut fiat pars cubica $\frac{1}{27}$. ac de reliquis idem sentiendum est.*

Rursum aliquota numeri pars in quadratum multiplicata, numerũ gignit, in cubum, quadratũ; in quadratiquadratum, cubum; in quadratocubũ, quadratiquadratum; in cubocubum, quadraticubum.

## SCHOLION.

*Sicut diximus omnem numerum, si in cognominem sibi partem multiplicetur, unitatẽ producere: ita etiã quæuis numeri aliquota pars in quadratum, non quoduis, sed quod communicatũ cum ipsa nomen gerit, multiplicata procreat numerum à quo id quadratum est ortum. Sit pars aliquota numeri, triens: quadratum à ternario, qui cõmunem cum dicta parte sortitur denominationem, est nouem. nouies $\frac{1}{3}$, id est nouem trientes, tres sunt scilicet unitates, productusq; hac multiplicatione ternarius est numerus, cognominis trienti seu tertiæ unitatis parti. Similiter etiam aliquotã numeri partẽ in cubum si ducas, quadratũ cõficies. Ea sit triens, cubus 27. uigintisepties $\frac{1}{3}$, hoc est 27 trientes, nouem faciunt unitates, itaq; extitit quadratus nouem ex hac multiplicatione. Eadem est & aliorũ ratio. Id quoq; ostendatur descriptione. Sint duæ rectæ ad angulum rectũ coniunctæ a b & a c: sitq; a b quatuor unitatum, ac unius, describaturq; ex eis parallelogrammum a b c d, & a b in suas unitates diuidatur punctis e, f, g. Iam cum a b quadratus sit, quatuor constans unitatibus, natus binario in se ducto. A c quoq; in duas partiamur partes in puncto h, ut habeam partem cognominem numero qui quadrati est latus, semissem scilicet: ut a h, & h c, utraq; sit semissis ($\frac{1}{2}$) unitatis. ducãtur porrò è punctis e, f, g, lineæ paralleli ad lineam a c: nimirum e k, f l, g m: tum à puncto h parallelus lineæ a b, uidelicet h n. Cum ergo totum parallelogrãmum a b c d quatuor unitatibus constet: & parallelogrãmum a n huius sit ($\frac{1}{2}$) dimidium, diuisi in duas æquales partes linea h n: utiq; a n duabus constabit unitatib. ostensumq; est, ut aliquota pars numeri in quadratum, nimirum a h in a b, $\frac{1}{2}$ in 4, ducta binarium numerum restituat, a n uidelicet. Nam totum a b c d parallelogrammum quatuor talib. partib. constat, quarum duas continet a n. Similiter si pars numeri maneat, a b aũt octo unitatum ponamus, utpote cubus: cùm rursus totum a b c d octo unitatum sit, & ab h n in æquales duas partes secetur: a n quatuor erit unitatum, qui est numerus quadratus. Similis est cæterorum quoq; ratio.*

Quadrati porrò aliquota pars multiplicata in numerum, numeri aliquotam partem producit: in cubum, numerum: in quadratiquadratum, quadratum: in quadratocubum, cubum: in cubocubum, quadratiquadratum.

Cubi aliquota pars ducta in numerum, quadrati aliquotã partem gignit: in quadratum, numeri: in quadratiquadratum, numerum: in quadratocubum, quadratũ: in cubocubum, cubum.

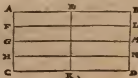
Quadratoquadrati pars aliquota multiplicata in numerum, cubi aliquotam partem creat: in quadratum, quadrati: in cubum, numeri: in quadratocubum, numerum: in cubocubum, quadratum.

Quadratocubi aliquota pars in numerum multiplicata, quadratoquadrati aliquotam partem gignit: in quadratum, cubi: in cubum, quadrati: in quadratoquadratum, numeri: in cubocubum, numerum.

Cubocubi pars aliquota in numerum ducta, quadratocubi aliquotam procudit partem: in quadratum, quadratoquadrati: in cubum, cubi: in quadraroquadratum, quadrati: in quadratocubum, numeri.

## SCHOLION.

*Quod ait quadrati aliquotam partem in numerum multiplicatam, numeri producere partem aliquotam: Esto pars illa quadrans, numerus duo. dicemus, duo quadrantes semissem faciunt: is à binario habet denominationem, cùm duo semisses totam unitatem faciant. estq; aliquota pars numeri. Similiter aliquota quadrati pars in cubum ducta, numerum gignit. Sit enim quadrati aliquota pars $\frac{1}{4}$, cubus 8. octo quadrantes sunt 2, qui est numerus. Hoc etiam è descriptione liquet. Ducantur duæ rectæ ad angulum rectum iunctæ a b & a c: quarum a b sit unitatum duarũ, a c unius. describaturq; de his parallelogrãmũ a b c d, diuidaturq; a b in duas unitates puncto e. & cùm a b sit numerus, quippe duabus constans unitatibus, & quadratum binarij sit 4: etiam a c diuidatur in quatuor partes æquales, punctis f, g, h, quarum una quæuis erit unitatis quadrans. ergo a f pars aliquota erit quadrati, utpote unitatis quadrans. Ducaturq; à puncto e parallelus lineæ a c linea e k: & à punctis f, g, h, ducantur paralleli ad lineam a b, uidelicet f l, g m, h n. Cùm ergo totum parallelogrammum a b c d sit duarum unitatum, & in duas æquales partes secetur à linea g m: ergo a m parallelogrammum unius est unitatis. Quod cùm ipsum quoq; in duas æquales partes linea f l diuidat; ergo a l dimidium est unitatis. demonstratumq; est, quadrati aliquotam partem in numerum multiplicatam, a f in a b nimirum, scilicet $\frac{1}{4}$ in 2, aliquotam partem numeri produxisse, a l, semissem unitatis. Similiter si a f maneat aliquota quadrati pars, & a b cubum, siue octo unitatum ponamus: a l erit numerus. nam hoc cùm sit quadrans ex a b c d, hoc autem octo unitatum ponatur; utiq; a l duarum erit unitatum.*




Quod deesse dicitur (defectum uulgò usurpant) in id quod ipsum etiam deesse dicitur si multiplicetur, productum adesse & reliquis adijci debere scito. si uerò in id quod adest, id quod deest multiplicetur: productum ijs quæ deesse dicuntur adnumerabis, signum eius uel *. Declaratis ergo multiplicationib. in conspicuo sunt etiã partitiones propositarum specierũ. Rectum itaque est, eum qui hoc negocij occipit, in compositione, diuisione, & multiplicatione quæ formis accidere crebrò solent, exercitatum esse. nimirum qua ratione formas quæ uel adsint uel desunt non eiusdem multitudinis, alijs adijcias formis, quæ uel sunt, uel itidem sunt atque desunt. Et quomodo à formis quæ sunt, alijsque quæ desunt, alias auferas, alias quæ uel sint, uel itidem sint atque desint. Deinde si in tractanda aliqua quæstione species quædam emergant alijs ijsdem formis æquales, neque tamen eadem multitudine: ab utraque parte auferendæ sunt similes à similibus: donec tãdem una forma uni æqualis formæ exsistat. Quod si ab utraque parte desint quædam species alteri, alteri adsint: quæ desunt, utrinque addenda sunt, dum formæ eædem utrinque inueniantur: rursumque utrinque auferenda similia à similibus tantisper dum ab utraque parte eadem una forma relinquatur. Atque hoc accuratè in ipsis quæstionũ postularis quoad detur conabere efficere, usque dum una species uni speciei ęqualis depræhẽdatur. Posterius aũt tibi cõmonstrabimus, quomodo quæstio explicetur, etiam cum duæ numerorum formæ uni æquales inueniuntur. Nunc uerò ad ipsas quæstiones accedemus, cùm nobis uia abundè pateat, ob materiam in ipsis formis collectam. Cùm autem plurimi sint numeri, & mole ingentes, itaque etiam tardè confirmentur, compræhendantur ab his qui eos accipiunt; sintque in ijs multa quæ ægrè memoriter teneri possint: statim quæ ex ijs ita decerpi possunt, ita ut maximè in tractationis principio elementorum partes sustineant, primo loco proponere, & à simplicioribus ad perplexiora progredi:

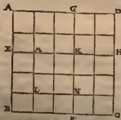
gredi:uti par est. sic enim rudimentum deponentibus ea fient penetratu faciliora, & in memoria eorum hærebit deductio, pertractatione eorum libris tredecim inclusa.

## SCHOLION.

*Defectum uocat non simpliciter, & qui nullo alio exstante deesse dicatur: sed exstans aliquid, cui quippiam deesse intelligamus. ut si ponamus Numerum esse unitates 2, & dicamus, Esto hic N. unitatum sex: erit numerus prior 1 N — 4. nam sex, binario demto, sunt quatuor. Quod autem in exstante, idem fit in defectu. Nam defectus numeri in defectum unitatum, numerum exstantem aliquem gignit: in defectum numeri, quadratum: in quadratocubum: ac deinceps. Similiter & defectus numeri in exstantes unitates, defectum numeri procreat, in numerum, quadrati: ac deinceps. Hæc quoque descriptione lineari demonstrentur. ac primum quod negatio quantitatis seu defectus, in negationem quantitatis multiplicata, affirmationem quantitatis uel exstantem quantitatem, hoc est penuria copiam gignat.*

(XYLANDRI. *Hæc ut λεῖψιν & ὕπαρξιν interpretarer, adieci. hanc etiam præsentiam, illam absentiam uertere libuit.*)

*Ducantur duæ rectæ lineæ ad angulum rectum coeuntes a b & b c, quarum utraq; sit unitatum 5 — 1 N. ponamusq; eum numerum esse unitatum duarum. & sit penuria quæ lineæ a b accidit, a e, unius numeri seu duarum unitatum. ergo e b constabit tribus unitatibus. penuria autem lineæ a c accidens, sit c f, ipsa quoq; unius numeri seu duarum unitatum. ergo b f itidem tribus constabit unitatibus. Et cùm duæ sint lineæ a b & b c, utraq; 5 — 1 N, eaq; oporteat unam in alteram multiplicari: ut ostendatur quo pacto penuria in penuriam ducta copiam, in copiam ducta penuriam procreet: non Indicam heic multiplicandi rationem, quæ inuersum Græcanici moris ordinem sequitur, sed nostram tenebimus. Primùm itaq; copiam unitatum in se multiplicemus: tum eandem in penuriam N. pòst penuriam N. in copiam unitatum: atq; tandem penuriã N. numeri in seipsum: atq; ita propositum demonstremus. His ita positis, cùm linearum a b & b c utraq; sit unitatum 5, altera in alteram multiplicetur, ut fiat quadratum a b c d unitatum 25. omnesq; unitates describantur totius quadrati. Secundum hæc multiplicetur a b, copia siue præsentia quinq; unitatum in se absentiam unius numeri in linea b c. ac quandoquidem unitatibus in numeros ductis numeri producuntur: & præsentia in absentiam ducta, absentiam procreat: auferatur f d parallelogrammum à toto quadrato a b c d, nimirum penuria 5 N, aut 10 unitatum. relinquetur a f parallelogrammum, unitates continens 15. Rursus multiplicetur a e defectus unius N, in b c copiam 5 unitatum: fietq; rursum penuria numeri 5: oportebatq; eam esse parallelogrammum a h. sed quoniam prioris penuriæ causa quadratum g h fuit ablatum, neq; licet idem bis penuriæ utriusq; ergò detrahi: auferetur quidem a k parallelogrammum, quod est numerorum 3: ac præterea quadratum k l numeri 2. ut rursum penuria conficiatur numeri 5. quæ est a g, k e, n m: quæ superficies sunt, decem unitatum. ac superest gnomo b e m l n f, quinq; unitatibus constans.*




*sed quoniam detractis defectibus utrinq; a e & f c, relinquebatur tam e b quàm b f unitatum trium: hisq; inclusum quadratum necesse est fieri unitatum 9, restant autem gnomonis dicti unitates quinque: his alias quatuor adijci oportet, ut trium unitatum quadratum absoluatur. Multiplicata ergo a e penuria unius N. in f c unius numeri penuriam, quadrati unius copiam procreabit, quod sit 4 unitatum. Numerus enim qui latus fuit quadrati, erat duarum unitatum. Quadratum itaq; k l unitatum quatuor, antè subtractum, nunc restituitur, adiunctumq; gnomoni b e m l n f, id est quinq; unitatibus, quadratum b k conficiet, unitatum nouem. quod futurum etiam erat sola e b in solam b f multiplicata, nimirum tribus unitatibus in tres unitates ductis, si defectus nequaquam fuissent adsciti. Est ergo quadratum e b f k 1 Q. & 25 unitates — 10 N: scilicet 29 unitates — 20: hoc est, unitates 9. Iam ergo demonstratum est, quomodo absentia in ~~præsentiam~~ multiplicata, præsentiam gignat: itemq; ut absentia in præsentiam, absentiam. Veruntamen hoc posterius etiam seorsim demonstretur. Ducantur duæ lineæ rectæ ad angulum rectum coeuntes, a b & b c. sitq; a b trium unitatum, b c 4 — 1 N. rursumq; numero tribuantur unitates duæ, sitq; numerus e c, erit ergo b e unitatũ duarum. Multiplicetur primùm copia trium unitatũ in quatuor unitatũ copiã, exsistet parallelogrãmum a b c d unitatũ 12. eaq; oẽs describãtur. Deinde a b ducatur in e c, tres nimirũ unitates in numeri absentiã: orietur penuria trium numerorũ, hoc est unitatũ sex, parallelogrãmum uidelicet e d. superest ergo parallelogrãmũ a e, unitatũ sex, cõpositũ ex a b & b e; hoc est, trib. multiplicatis in duas unitatibus. quod exsti-*

*turũ erat, etiã defectib. nõ adſcitis. Eſtq; parallelogrãmum a e 12 unitatũ, demtis tribus numeris: hoc eſt 12 —— 6. nimirũ unitatũ 6. Præterea cũ demõſtratũ ſit quo unitates deficiente numero in unitates deficiente numero multiplicẽtur: oſtẽdamus iã quo pacto unitates cũ numero annexo ipſis, in unitates quib. numerus deſit, multiplicari debeant. Ducãtur duæ rectæ lineæ angulũ rectũ ſuo cõcurſu facientes, a b & b c. quarũ a b ſit 1 N. & unitates 3: b e unitatũ 4, deficiente uno numero. eſtoq; rurſum numerus duab. ex unitatib. collectus. Ac ſit numerus qui in linea a b continetur pro ſe, a e, in linea autem c. eius defectus ſ e. Erit ergo e b unitatũ trium, b f duarũ. Multiplicata primùm a e in b c: id eſt præſenſentia unius numeri in præſentiã quatuor unitatũ, fit a h parallelogrãmum, numeros cõtinẽs 4, unitates 8. Rurſus a e in f c multiplicata, id eſt præſentia unius numeri in abſentiã alterius, fit quadratũ b k, unitatũ quatuor. quo ſubtracto, relinquitur e b parallelogrãmum quatuor unitatũ. Rurſum ſi multiplices e b in b c, præſentiã triũ unitatũ nẽpe in quatuor unitatũ præſentiã, exſiſtit b h parallelogrãmum, 12 unitatũ. Quæ ſi deſcribãtur, inuenies figurã a b c k g b unitatũ ſedecim. Rurſus e b (quæ eadẽ eſt cũ k c) in ſ c multiplicata, hoc eſt præſentia trium unitatũ, in unius numeri defectũ: defectus procreatur numerorũ triũ, quippe parallelogrãmũ ſ k, numeris tribus, uel unitatib. ſex cõſtans. quod ſi auferatur à ſuperficie a b c k g b, relinquitur a ſ parallelogrãmum unitatũ 10. quod erat etiã futurũ, ſi a b in b ſ duceretur, nõ adſcito defectu. & eſt a ſ parallelogrãmum 4 N. —— 1 Q, 12 —— 3 N. hoc eſt, deleta copia triũ numerorũ à penuria triũ numerorũ, 1 N. unitatumq; 12 —— 1 Q. eſt aũt id quadratũ unitatũ quatuor. eſt ergo ipſum 14 —— 4, id eſt, unitatũ 10. Demõſtrata aũt multiplicatione defectus, demõſtranda eſt etiã eius compoſitio & exceſſus. Si ſint duo numeri, alter (exempli gratia) 10, alter 10 —— 1 N. cõiũcti efficiẽt 20 —— 1 N. Si aũt ſint duo numeri, alter 10 —— 1 N, alter 10 —— 2 N, ſumma eorũ erit 20 —— 3 N. Si uerò ſint duo numeri, quorũ alter 3 N. † 10, alter 10 —— 3 N. collecti cõſtituent 20: tantũ copia 3 N à penuria 3 N. cũm aboleatur. Sin alter ſit 25 † 3 N, alter —— 6 N. ſumma erit 25 —— 3 N. cũ defectus 6 N. copiã 3 N. perimat, & adhuc penuria aliorũ 3 N. relinquatur. Si aũt numeri ſint 10 † 3 N. & 10 —— 2 N. ſumma cõficietur 20 † 1 N. duob. N. abolitis duorũ N. defectu, et 1 N. adhuc ſuperſtite. Atq; hæc quidẽ eſt cõpoſitio ſiue additio. Exceſſus aũt, ſiue ſubtractio ſic intelligitur. 10 amplius eſt quàm 10 —— 1 N. ipſo defectu, uno ſcilicet N. Si à 10 —— 1 N. ſubtrahas 10 —— 2 N. illũ hoc maiorẽ deprehẽdes uno N. quantum ſcilicet eſt quo præſtat defectus defectui. 10 † 3 N. præſtat huic 10 —— 3 N. ſex numeris, copia ſ. & defectu N. 10 † 3 N. ſi ab eo ſubducas 10 —— 6 N. relinquit exceſſum 9 N. 3 ſcilicet copiæ, & 6 penuriæ. 10 † 5 N. amplius quàm 10 —— 2 N. habẽt, exceſſum uidelicet 5 N. eadẽ ratione. Ponatur uerò numerus quotquot uoles unitatum. Examinando rẽ ita, ut diximus, habere cõperies. Ea nunuerò quo pacto cõmunes defectus adijciat, & ſimilia de ſimilibus, æqualia de æqualibus auferat: utq; diuidendo rẽ eò deducat, ut una ſpecies uni ſpeciei æqualis relinquatur, puta numerus aliquis aut quadratũ unitatibus, aut aliquid tale: id in ipſa quæſtionum tractatione euidentius diſcemus.*

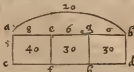
Additio. Subtractio.

1. QVAESTIO. Propoſitũ numerũ in duos partiri, quorũ alter alterũ quãto petitur ſuperet interuallo. Datus numerus ſit 100. interuallũ 40. Statuamus minorẽ numerũ eſſe 1 Numerum. Maior ergo erit unus numerus, & 40 unitates: Summa amborũ, N. 2. V. 40. Dabatur aũt, hãc eſſe 100 V. Proinde 100 V. æquantur 2 N. & 40 V. Iã ab his æqualibus utrinq; aufero æquale, nimirũ 40 V. & à 100 V. & à 2 N. † 40 V. reſidua erunt æqualia 2 N. atq; V. 60. ergo unus uterq; numerus eſt 30 V. Ex argumento igitur tractationis, minor eſt unitatũ 30. ergo maior unitatum 70. Demonſtratio in promtu eſt.

SCHOLION.

*Iubet 100 numerũ in duos diuidere, maiorẽ & minorẽ, ut maior minorẽ ſuperet 40 unitatibus, ſicut hic 70, hunc 30. ſtatuitq; minorẽ eſſe 1 N. maiorem 1 N. & 40. hi iuncti conficiunt 2 N. & 40. atqui 100 erat numerus diuidendus. ergo hi numeri iuncti (inquit) hoc eſt 2 N. † 40 æquãtur numero 100. Quoniam ergo datur hoc, ſimilia à ſimilibus auferre, & cõmunes defectus addendo explere, ut in progreſſu uidebimus: cum heic ſimiles ſint unitatib. unitates: & à 2 N. † 40, & à 100, utrinq; aufert 40. ita relinquuntur ab illa parte 2 N. ab hac 60. Et quoniam ab æqualibus, puta 2 N. † 40, & 100, æquale (ſcilicet 40.) ablatum eſt, reſidua quoq;, uidelicet 2 N. & 40, æqualia erunt. ergo etiã 1 N. & 30 æquantur. Is eſt minor: additiſq; ei 40, quod erat interuallum datum, maior eſt 70. Hypoſtaſes ſeu argumentum uocat ipſos qui quæruntur numeros. Numerum autem Dophantus nõ ut defin*

*ut definitum accipit, sed tantùm ut quantitatē ponit. nā in quibusdam quæstionibus maior quàm 40. in quibusdam minor, interdum etiam ipsa unitate minor inuenitur. Notandum in hac quæstione, quòd diuidēdus numerus uel par esse uel impar, & interuallum partium itidem par aut impar pro tuo arbitratu statui potest. Id quoq; sciendū, siue à pari imparem, siue ab impare parem auferas, reliquum fore impar. Vniuersè autem omnis par numerus ex duobus aut parib. aut imparib. constat, in eosq; diuiditur: ut utram speciem à pari auferas, reliquum ei sit simile: si autē ab impari parem, speciem eius à quo facta est detractio, seruat residuum. Quòd si in hac quæstione 10, qui est par numerus diuideremus in duos numeros, quorū maior minorem superet ternario: 3 de 10 detractis 7 relinquūtur, cuius semissis $3\frac{1}{2}$. cui si addas 3, maior pars erit $6\frac{1}{2}$, minor $3\frac{1}{2}$. interuallum 3. summa 10. Quæstio hæc etiam lineis potest explicari. Esto parallelogrāmum a b c d, sitq; a c tot unitatum, quot continet aliquota pars numeri 40, ea lege, ut 100 quoq; aliquotā habeat partē, unitatū istarum numero denominatā. Sit uerbi gratia a c 5, quæ est $\frac{1}{8}$ de 40. & cū 100 habeat $\frac{1}{5}$, nimirū 20, sit a b 20. ut totū parallelogrāmum sit 100. Et cū 5 sint octaua pars è 40, a e ponatur 8, ducaturq; e f linea lineæ a c parallelus. liquet superficiem a f esse 40. Et cū e b (reliquū lineæ a b post pūctū e) sit 12, liquet superficiē e d esse 60. Ea secetur in duas æquales linea g h, eritq; utraq; pars e h & h b 30. cùm & g h æqualis sit lineæ a c, & e g ac g b, utraq; 6. Addito ergo a f ad e h, fit a h 70. & relinquitur h b 30. itaq; diuisus est 100 in duos, quorū maior minorē superat 40 unitatibus. quod fuit (demonstrandū.*




XYLANDRI.

*Tales ferè sunt oēs Græci scholiastæ problematū Diophanteorū explicatiōes. Cuius semissis $3\frac{1}{2}$.) In Græco uerba sunt mutilata. res est plana. Libet & huic & alijs nostrū calculū subijcere, nihilo deteriorē, aliquāto etiā clariorē eo, quē scholiastes in margine ꝓblematū Diophāti annotarat.*

| | |
|---|---|
| *Minor Maior* | *Vel sic. Maior Minor* |
| *1 N. 1 N. † 40* | *1 N. 1 N. — 40* |
| *1 N.* | *1 N.* |
| *Summa 2 N. † 40 \|\| 100* | *Summa 2 N. — 40 \|\| 100* |
| *aufer utrinq; 40* | *adde utrobiq; 40* |
| *2 N. \|\| 60* | *2 N. \|\| 140* |
| *1 N. \|\| 30, &c.* | *1 N. \|\| 70, &c.* |

*Neq; ego istas extheses uolui textui adijcere, plenas characterū insolentiū, sæpe mancas, sæpe uitiosas. numeri nostri abūdè implebūt earū usum. V. in hoc problemate unitatē designat, quod deinceps signum omisi. quia cùm nulla insigniuntur nota numeri, tum uel maximè intelliguntur esse absoluti. Et quia canones infinitos fabricari ex Algebræ operationib. etiam de reb. maximi momenti potest artifex: ex hac quoq; canonem generalem & demonstratum faciemus.*

CANON. Si diuidendus sit numerus in duas partes certo interuallo differētes, id à toto detrahatur, aut ei addatur semissis summæ aut residui, hic minorē, ille maiorē portionem ostendit. diuidantur 74 in duas partes, quarū interuallū 28. 74 & 28 sunt 102. semissis 51, pars maior. 74 demtis 28 sunt 46, semissis 23. portio minor, &c.

II. Datum numerū in duos partiemur, quorū sit quę petitur ratio. sit numerus 60 diuidēdus in duos, in ratione tripla. sit minor 1 N. maior erit 3 N, triplus minoris. Hi duo iuncti 60 debēt conficere: at conficiunt 4 N. ergo 4 N. æquales sunt unitatibus 60. Numerus ergo est 15. tanta est minor pars, maior 45.

SCHOLION.

*In prima quæstione tātùm excessus maioris supra minorē quærebatur. in hoc ratio duntaxat quæritur: in tertio simul & ratio quæretur, & excessus: autore, quod in se receperat, à simpliciorib. ad distortiora ꝓgrediēte. Secūdum hoc etiā facilius demonstrare licet. Cū de duab. numeri 60 partib. maior minoris sit tripla, ergo quadrantem habet totus, isq; est minor portio, 15. maior ergo 45. Id quoq; per lineas demōstremus. Sit a b c d parallelogrāmū. et cū duarū numeri 60 partium maior sit minoris tripla: cōsequēs est ipsum 60 habere partē aliquotā, cuius nomē unitate amplius quàm ternariū gerat, hoc est quadrātē, à quaternario denominatū. Is ergo sit 15. & ob quadrātē istū linea a c sit 4 partiū: & a b 15 partiū, q est quadrās ex 60. Totū ergo parallelogrāmū a b c d erit sexaginta partiū. sumatur quadrans lineæ a c, puta a e, unitatis unicæ. ducaturq; e f parallelus ad lineam a b: erit superficies a f, 15. e d autem 45, prioris triplum.*

*In uniuersa*

*In uniuersum autem in tali argumento, quae ratio est maioris partis ad minorem, totum habere oportet aliquotam partem, cuius nomen illius rationis denominationem unitate superet. uerbi gratia, si partes sint in ratione tripla, quadrantem diuidendus habet: si in quadrupla, quintam, ac sic deinceps, laterumq; alterum oportet tot unitatum, quot continet pars ista aliquota, facere: alteram tot unitatum, quot eius partis denominatione continentur.*

XYLANDRI.

*Maior 1 N.*
*Minor $\frac{1}{3}$ N.*

*Sum. $1\frac{1}{3}$ N. || 60.*

*reductio —— 4 N. || 180*

*1 N. || 45.*

*Maior 45.*
*Minor 15.*

*Minor 1 N.*
*Maior 3 N.*

*Summa 4 N. || 60*

*1 N. 15.*
*Minor 15, &c.*

*Huius problematis usus latè patet in opere geometrico & arithmetico, & scholiastes canonē non ineptè tradit, nisi quod ad multiplicem rationem adstringit, quod uniuersè omnib. omnium rationum modis ac formis congruit. res ita habet.*

Numeri diuisio in duas partes, quae rationē praescriptā habeant.

CANON. Si numerus in duas partes diuidendus sit, quarum ratio sit data: huius minimos terminos coniūge, per summam diuide totum, quotientem per terminos multiplica seorsim, habebis quod quaeritur. *Id duobus exemplis monstremus. numerus 153 diuidatur in duos, rationis octuplae. termini rationis minimi 1 & 8. summa 9. per hanc diuiso 153, quotiens est 17. is in 1 & 8 ductus, 17 & 136 producit, partes quaesitas. Ea conditione lata, si 100 diuidere iussus fuisses; hic per 9 diuisus, quotientē dedisset $11\frac{1}{9}$. partes ergo $11\frac{1}{9}$ & $88\frac{8}{9}$. Nam quod scholiastes de aliquota parte autumat, multo est, quàm res postulet, angustius: cùm minutiarum usus in proportionum tractatione regnum obtineat. Alterum exemplū. Partire 88 in duos numeros, quorum maior minorem bis, eiusq; insuper bessem contineat. rationem uulgo duplam superbipartientem tertias appellant. termini minimi sunt 8 & 3. summa 11. per hanc diuide 88, quotiens 8 multiplicetur seorsim in 8 et 3. habebis partes quaesitas 64 & 24. nam bis 24, hoc est 48, & 16, qui est bes de 24, coniuncti 64 omnino exhibent. Eadem lege si diuidendus fuisset 128. is per 11 diuisus quotientem exhibuisset $11\frac{7}{11}$. qui ductus in 8 & 3 seorsim, partes designasset $93\frac{1}{11}$ & $34\frac{10}{11}$. Si experiri libet, maiorē per 3, minorem per 8 multiplica: quae est lex proportionalium numerorum alibi à nobis quoq; declarata. Quo pacto in plures duabus partes proportionales seu continuè seu distinctè numeri fiat diuisio: alius erit dicendi locus.*

III. Propositum numerum in duos diuidere, qui & datam rationem teneant, & quanto poscitur interuallo distent. Esto numerus 80, ratio partium tripla, interuallum 4, quo maior triplum minoris superat. Statuamus minorem 1 N. erit maior 3 N. & 4: scilicet ut & triplus minoris sit, ac praeterea cōtineat 4. Restat ut ambo aequentur numero 80. atqui coniuncti faciunt 4 N. & 4: id ergo aequale est 80. Aufero similia à similibus: relinquuntur 76 aequalia 4 N. ergo 1 N. erat 19. Is ex proposito est minor, maior 61. ad triplum minoris (57.) adiectis 4, quae de 80 subduxeram, ut triplorum numerorum inuenirem quantitatem. Eadē maiori postea adijcio, hac cognit…

SCHOLION.

*Statuatur parallelogrammum* ABCD. *& quando 80 numeri partes ita habent, ut maior minoris sit tripla, utraq; 4 unitates habeat: has de 80 detrahe: supersunt 76. Cumq; pars tripla sit una alterius, 76 habebit quadrātem suum, qui nimirum diuisione per 4 inuenitur 19. Atq; huius quadrantis causa,* AC *sit 4 partium: itemq; propter 19 unitates* AB *sit nouendecim. Ergo totum* ABCD *erit 76. Sumatur* AE *quadrans lineae* AC, *ducaturq;* EF *parallelus lineae* AB. *cumq;* AE *sit 1, erit* AF 19, ED *autem 57. Adijciatur porrò superficiei* AD *alia parallelogrāmus* CH *cuius area sit 4, quod antè fuerat de 80 detractū. eius latus* CG *sit $\frac{4}{19}$* GH 19. *Ergo totū parallelogrāmū* EH *erit 61, triplū superficiei* AF, *ac praeterea 4 amplius unitatibus. Tota autem figura est* AH, *octoginta unitatū.*

XYLAN-

*Minor 1 N.*
*Maior 3 N.* † *4*

*Sum. 4 N.* † *4 || 80*
*aufer 4 utrinq.*
*4 N. || 76*

*1 N. || 19.*
*19 minor. ergo 57* † *4, id est, 61, maior. Summa 80.*

*Aliter* *Maior 1 N. ergo 1 N. —— 4 triplum minoris.*
*Minor* $\frac{1}{3}$ *N. ——* $1\frac{1}{3}$

*Sum.* $1\frac{1}{3}$ *N. ——* $1\frac{1}{3}$ *|| 80*
*Omnia per 3 multiplicā, ut fiat reductio*
*4 N. —— 4 || 240*
*adde utrobiq. 4*

*4 N. || 244*
*1 N. || 61. Maior. aufer 4, restant 57, triplum minoris. ea est 19.*

CANON. Detracto eo numero, qui ultra quotuplū minoris adesse maiori debet, de numero proposito, residuum diuide per summam minimorum quæsitæ rationis terminorum. quotientem, &c. *idem enim est cum superiore, & ipsa exempli propositi ratio te cætera docet.*

IV. Duos numeros inuenire in ratione data, dato etiam interuallo. Mandatū sit ut maiorem minoris quincuplum, eoq; etiam uiginti unitatibus maiorem constituamus. Sit minor 1 N. ergo maior erit 5 N. interuallum numerorum esse debuit 20. at est 4 N. his ergo æquantur 20. ergo 1 N, 5. tantus est minor. maior itaq; 25. Ita maiore ad minorem quincuplo, interuallum est 20.

SCHOLION.

*Quartam hanc quæstionem alio in exemplo consideremus. Superet maior minorē quinario, sitq; minoris sesquiplus maior. Sit minor 1 N, maior* $1\frac{1}{2}$ *N. interuallum* $\frac{1}{2}$ *N. atqui debebat esse 5. ergo minor est 10 maior 15. demonstremus hoc etiā lineis. Quia maior minorē superat 20 unitatibus, sit parallelogrammum* ABCD, *20 unitatum*, AC 4, AB 5. *Et quoniam totus maior minoris quincuplus ponitur, erit utiq; excessus (*ABCD *ipsum) minoris quadruplus. Si enim numerus multiplex sit alterius, qui numerus rationem horum denominat, eo minor unitate rationem excessus ad minorem denominabit. Ergo minor erit 5. cui æquale ponatur parallelogrāmum* EFGH. *huic si adijciam ad* ABCD *æquale* CDKL, *totum* AL, *quod est 25, erit minoris partis* CL *quincupla, & 20 unitatibus ei præstabitur.*

ALITER.

*Cùm maior minoris sit quincuplus, interuallum 20 propter rationem quincuplam sit* AC *5, & propter interualli numerum* AB *sit 20. describaturq; parallelogrammum, quod totum erit 100. Quæratur eius pars, quā unitate minor quinario numerus, id est 4, denominet, quod fit ducta* EF *linea, ut* AF *sit quadrans totius. Ergo erit 25. Quæro cuius hic sit quincuplus, & inuenio quod quinarij. Eos ergo dico esse qui quærebantur numeros. Atq; ita quidem res habet in multiplicibus. Nunc etiam de ratione ea qua totum & aliqua pars minoris in maiore continetur uideamus. Dentur duo numeri quorum maior minoris sit sesquitertius, eundemq; superet quinario. Quoniam fundus sesquitertiæ rationis est 4, propter hunc fit* AC *4, & ob excessum* AB *sit 5. totum parallelogrammum 20. Et cum 4 ad 3 sit sesquitertius, sumo unitate minorem linea* AC *lineam 3,* AE, *& duco hanc in excessum 5, fiunt 15. & numeri inuenti sunt 15 atque 20. Præstat autem primam demonstrationem tenere, quæ ad omnes pertinet. Nam earum rationum, qua totum & pars, ac qua totum & partes minoris in maiore continentur, ac cæterarum, sua cuiusq; generis desideratur demonstratio, & facile est de omnibus explicationem adferre: sed uolenti, etiā reliqua ex positis sunt manifesta. Notandū, quod in prima demōstratione de multiplicib. diximus, de ratione quā habet interuallū ad minorē nomine: de reliquis nihil tradidimus rationū generib. Nūc ergo dicimus, excessum eorū aliquotā esse partē minoris numeri, nō (ut in multiplicibus) unitate deficiente denominatione, sed ab aliquota parte minoris nomē habente. ita excessus sesquitertij triens est subsesquitertij. sesquiquarti quadrās subsesquiquarti, & in superpartientibus, uerbi gratia, supertripartiente, excessus est subsupertripartienti tres partes: eadēq; cæterorū ratio. Præstat ergo prior demōstratio.*

XYLAN-

XYLANDRI.

*Minor 1 N.*
*Maior 5 N.*

*excessus 4. N. || 20.*
*1 N. || 5.*
*ergo numeri 5 & 25.*

*Vel*

*Maior 1 N.*
*Minor $\frac{1}{5}$ N.*

*excessus $\frac{4}{5}$ N. || 20*
*utrunq. p 5 multiplica. 4 N. || 100. reductio.*
*1 N. || 25. Maior, &c.*

ALITER.

*Minor 1 N. adde excessum 20. ergo 1 N. † 20 || 5 N. maiori. deme utrinq. 1 N. erunt 20. || 4 N. ergo 1 N. 5 minor, &c.*

*Vel*

*Maior 1 N. deme interuallum, ergo 1 N. — 20 || $\frac{1}{5}$ N. minori. Adde utrobiq. 20. erunt 1 N. || $\frac{1}{5}$ N. † 20. aufer utrinq. $\frac{1}{5}$ N. erit $\frac{4}{5}$ N. || 20. ergo 4 N. || 100. fit 25 maior.*

CANON. Rationis datæ minimorum terminorum minorem aufer de maiore, interuallum diuisum per residuum, ostendet numerũ qui in istos ductus terminos, quæsitos gignit.

Inuentio duorũ numerorũ quauis ratione & quouis interuallo. Rationum seu proportionũ species.

*Hic canon ad omnes proportionum seu rationum species pertinet. quarum cum fiat ab interprete mentio, obiter eas recensebimus, & explicabimus. Primò omnium constat, omnem numerum alterius numeri partem esse, uel partes, minorem scilicet maioris. Ita quinq. genera proportionum exsistunt. quod intellectu perfacile est, si hoc teneas, rationem quamuis debere terminis exprimi minimis, id est, uersus se inuicem primis. Multiplex proportio est, cùm maior totum minorem præcise aliquoties continet, uel aliquoties sumtus minor maiorem conficit: hoc est, cùm minor maioris est pars aliquota, & unitate numeratur, quota sit numero indicante. Verbi gratia, 18 est $\frac{1}{8}$ octaua pars ex 144: qui numerus octies continet minorem, puta 18. id est, maior octuplus est respectu minoris, & ratio dicitur hæc octupla. Sic omnis quadratus numerus est multiplex ad suam radicem. 16 ad 4, quadruplus, id est, sicut 4 ad 1. In hoc genere minorem submultiplicem uocant. & sicut 24 ad 6 est multiplex, puta quadruplus: ita 6 ad 24 est subquadruplus, nempe eius quadrans. Nam de communicatione illa nomenclatura etiam suprà est facta mentio. 2. Superparticularẽ uocant, cùm maior minorem totum, eiusq. aliquotam (uti nunc descripta est) partem continet. Sic 12 est 8 & eius semissis: sesquiplum, & sesquialterum etiam nominant. idem 12 est sesquitertius ad 9, quem, & eius trientẽ continet. 1 $\frac{1}{3}$ uel $\frac{4}{3}$ hæc ratio, prior $\frac{3}{2}$ uel 1 $\frac{1}{2}$ scribitur. 3. Superpartiens est, cum maior minorẽ continet, & aliquot eius partes aliquotas: id est, talem præter totum portionem totius, quæ aliquoties sumta, non totum, sed eius multiplicem conficiat. superpartientem appellant. Sic 60 ad 36 est 1 $\frac{2}{3}$, quod superbipartientem tertias uocant: ad 42 est idem 1 $\frac{3}{7}$, id est supertripartiens septimas. duo hæc genera, si minor ad maiorem æstimetur, subsuperparticulares, & subsuperpartientes rationes constituunt. ut 3 ad 4 subsesquitertiam, 3 ad 5 subsuperbipartientem tertias. Eadem ad multiplicem si adiunguntur, multiplicem sesqui, aut multiplicem superpartientẽ constituunt. 4. ita 5 ad 2 est ratio dupla sesquialtera, & uicißim 2 ad 5 subduplasesquialtera. 5. 11 ad 3 est tripla superbipartiẽs tertias. 3 ad 11 subtripla superbipartiens tertias. Plurib. exemplis uti nihil attinet, cùm in uulgatis speculatiuis (ut uocant) libellis etiam plurib. ista agãtur, quàm res poscat: & quotidianus usus abundè suppeditet. Barbara autẽ, aut nouata potiùs uocabula qui circuitionibus politioribus posthabent, delicatiores sunt quàm prudentiores. Heic notent rudiores, de omnibus rationum generib. solo in multiplici minorem esse partem maioris, in reliquis, partes. Canonis tamen huius, qui nõ rarò te leuare molestia in reb. arithmeticis potest, exempla ad exercendos tirones subiciam.*

*1. Da in septupla ratione duos numeros, interuallo 312. Termini 7 & 1, residuũ 6. $\frac{312}{6}$ (52 is ergo est minor, cùm unitas in multiplicãdo nõ sit efficax. maior septies 52, id est 364. Rursum si eadẽ in ꝓportiõe duos, interuallo 50, postulet aliquis. $\frac{50}{6}$ (8 $\frac{1}{3}$ hic ergo est minor, & septuplus eius 58 $\frac{1}{3}$. interuallum 50. 2. Dentur in sesquinona ratione duo numeri, interuallo 14. Termini 9 & 10, residuum 1. ergo 14. per 9. & 10. multiplicati, quæsitos numeros gignunt 126 & 140. Eodem interuallo in sesquialtera duos inuenies ratiõe, 42 & 28. & dato interuallo 6 $\frac{1}{2}$ in hac ratione, 13 & 19 $\frac{1}{2}$. In sesquialtera. n. ratione minoris semißis & interuallũ semper sunt unum atque idem: in sesquitertia triens, & cætera: ualet enim hoc in omnibus superparticularibus. de*

*quo*

*quo alibi. Quod ideò monui, quia de ratione interualli ad minorem in multiplici ratione Scholiastes rectè monuit, maximè obscuritate meis uerbis sublata. de reliquis quod dixit, explicabitur planiùs. De multiplici quiuis intelligere potest, si uerbi gratia huic numero 12, idem adhuc septies adiungatur, fore totum ipsius octuplum, 96. 3. Dentur duo numeri in supertripartiente quintas, interuallo 33. ratio est $1\frac{3}{5}$, termini 8 & 5. residuum 3. per hoc diuiso 33, quotiens 11. is in terminos ductus, 88 & 55 producit, quæstioni satisfacientes. In hoc rationis genere minor & interuallum eam rationem constituunt, quæ est earum partium, quibus ultra totum maior supra minorem abundat. Quærantur alij duo, in ratione $1\frac{4}{5}$ interuallo 19. hi erunt $23\frac{3}{4}$ & $42\frac{3}{4}$. 4.5. In his rationibus, quæ ex multiplici & altera reliquarum componuntur, canon de ratione minoris ad interuallum prorsus constat, sed inuersè. nam heic semper unitate de rationis nomine detracta, ratio interualli ad minorem nomen gerat, proditur. Dentur duo numeri in proportione tripla sesquiseptima, interuallo 75. termini rationis $3\frac{1}{7}$ sunt 22 & 7, differentia 15. per hanc diuiso interuallo, 5 emergunt, quæ in terminos ducta, numeros quæsitos procreat 35 & 110. Dico autem rationem minoris ad excessum 35 ad 15, esse duplam sesquiseptimã. quia 1 de $3\frac{1}{7}$ demto, relinquuntur $2\frac{1}{7}$. Rursus dentur duo numeri in ratione $8\frac{1}{2}$, interuallo 31. Termini 17 & 2, discrimen 15. hoc diuidatur 31, quotiens $2\frac{1}{15}$. ergo numeri $4\frac{2}{15}$ & $35\frac{2}{15}$. Deniq; dentur duo numeri in ratione $6\frac{2}{3}$, sescupla superbipartiente tertias, interuallo 51. Termini 20 & 3. distantia 17. quotiens 3. numeri 60, & 9. deniq; 51 ad 9 (interuallum ad minorem) rationem habet $5\frac{2}{3}$. quod nomẽ fit, 1 de $6\frac{2}{3}$ subducta. Rursus dẽtur duo numeri in ratione $5\frac{4}{5}$, quincupla superquatripartiente quintas; interuallo 35. termini 29 & 5. differẽtia 24. $\frac{35}{24}$ ($1\frac{11}{24}$ quotiens in terminos ductus, producit numeros $7\frac{7}{24}$ & $42\frac{7}{24}$. Hæc omnia ita habere, experiere ipso opere. Denique πυθμὴν Scholiasta est, quod fundum dixi, & quasi fundamentum seu radicem. Nam sesquitertia à quatuor trientibus, ut sesquinona ab nouem octauis nomen sortitur. Quid Pythagoreis fuerit πυθμὴν, alibi dictum.*

V. Datum numerum in duos partiri, ut horum utriusq; aliqua, non tamen eiusdẽ nominis, pars, si coniungantur, numerum qui poscitur conficiant. Oportet autem hunc talem posci, qui in medio sit duorum numerorum, quibus partes totius propositi postulatis nomine eædem exprimuntur. Diuidatur ergo 100 in duos numeros ea lege, ut prioris triens cum posterioris quinta parte si coniungatur, 30 fiant. Esto posterioris $\frac{1}{5}$, 1 N. ipse ergo erit 5 N. proinde triens prioris erit 30 — 1 N, ipse 90 — 3 N. Hi autem duo coniuncti, cùm facere debeant 100, conficiunt 90 + 2 N, quod æquale est 100. & ubi ab æqualib. subduxeris æqualia, relinquuntur 2 N. æquales 10. ergo 1 N, 5. Et quia posuimus $\frac{1}{5}$ posterioris esse 1 N, ipse totus erit 25. Itẽ prioris $\frac{1}{3}$ erant 30 — 1 N, scilicet 25: ergo ipse totus 75. Et quidem 75 ac 25, summam conficiunt 100. prioris autem triens 25, posterioris quinta pars 5, summam 30.

## SCHOLION.

*Oportet autem hunc.) Id est, oportet eum inter trientem de 100, qui est $33\frac{1}{3}$, & quintam partem eiusdem 100, hoc est 20, incidere: cùm partium triens & quintans sumatur. hoc est, debet is qui poscitur numerus, neq; minor esse quam uiginti aut alij infra eum, neq; maior quam $33\frac{1}{3}$ aut alij supra eum: sed omnino excedere 20, & superari à $33\frac{1}{3}$. ac talis heic poscitur 30, qui incidit inter 20 & $33\frac{1}{3}$. Sed quiuis etiam reliquorum qui inter hos sunt, posci poterat. Quod si uel 20, aut minor eo, uel $33\frac{1}{3}$ aut maior eo posceretur, non consisteret quæstio. Idq; primum de 20 ostendamus. Esto prioris trientem, & posterioris quintantem componere 20. Esto quintans posterioris 1 N, ipse erit 5 N. Eritq; $\frac{1}{3}$ prioris 20 — 1 N, ipse 60 — 3 N. Hi duo compositi, conficiunt 60 + 2 N, æquales 100. & æqualia ubi ab æqualibus abstuleris, fient 2 N æquales 40. & sic 1 N erit 20. atq; ita posterior numerus (5 N) efficiet 100: prior autem, 60 — 3 N, nihil erit, cùm 3 N de 60 auferendi, ipsa 60 conficiant. Ergo 100 non est diuisus, quod flagitabatur: sed quæstio non consistit, ob eam quam diximus, causam. Multo autem magis hoc usu ueniet, si quis numerum quam 20 minorem postulet. Sic enim posterior ipsi 100 præstabit, pars toti. quod est absurdum. Rursum hoc ostendatur de $33\frac{1}{3}$. Cùm posterior sit 5 N. erit prior 100 — 3 N. summa eorum 100 + 2 N, æqualis 100. Atq; heic si de æqualibus æqualia auferantur, supersunt 2 N nihilo æquales. quod est absurdum. Multo minus stabit quæstio, si numerus poscatur maior quam $33\frac{1}{3}$. heic enim 2 N & aliquot præterea unitates æquabũtur nihilo. Ergo alius numerus poscẽdus est nullus, quam qui uigesimũ superet, & superetur à $33\frac{1}{3}$. Prioris triens (inquit) erit 30 — 1 N. Nam cùm prioris triens & posterioris quintans 30 faciant, hic quintans positus est 1 N. unde liquet, aliquot unitates & 1 N, 30 facere. Ergo 1 N subtracto de 30, remansit 30 — 1 N. Non-*

dum enim liquet, quot unitatum sit 1 N. infrà constabit, esse 5. ut idem sit dicere triens primi est 30 —— 1 N, ac si dicas esse 25. Proinde totus prior erit tres trientes, id est 90 —— 3 N, seu 90 —— 15, hoc est 75. Hi duo (inquit) compositi, faciunt 90 † 2 N. Cùm enim posterior sit 5 N. posterior 90 —— 3 N. aufer à 5 N posterioris, 3 N quę deerant priori. cùm, ut docuimus, copia si penuriam superet, quo illa hanc excedit, id est copia. Cum ergo posterior sit 25, & prior 90 —— 15, hoc est 75: hi duo iuncti 100 faciunt. & omnia 100 æquatur 100. Quod si sic Diophantus dixisset: 100 de 100, similis de simili, subducto nihil fuisset reliquum. Nunc ille 2 N † 90, ait æquari 100. & abiectis utrinq; 90, relinquuntur 2 N æquales 10. ergo 1 N est 5. Non est autem, quod priorem posteriore aut maiorem aut minorem semper fore existimes: cùm utrunq; horum fieri possit.

## XYLANDRI.

### DIOPHANTI OPERATIO.

$\frac{1}{5}$ posterioris 1 N. ipse 5 N.
$\frac{1}{3}$ prioris 30 —— 1 N. ipse 90 —— 3 N.

Summa 90 † 2 N || 100.
abiectis utrinq; 90
2 N || 10
1 N || 5.
Ergo posterior. 25. prior 100 —— 25,
uel 90 —— 15. id est 75.

*Obseruabis autem in hac operatione, semper triplū numeri qui postitur, & 2 N, æquari 100. Quod facit ad reliqua etiam intelligenda. Nam si ponas, partes istas debere conficere 25. 75 † 2 N || 100. faciet 1 N 12$\frac{1}{2}$. huius quincuplum erit posterior siue B 62$\frac{1}{2}$. Ergo prior A 37$\frac{1}{2}$. huius $\frac{1}{3}$. est 12$\frac{1}{2}$, illius $\frac{1}{5}$ itidem 12$\frac{1}{2}$. summa 25. si 24 esset numerus imperatus, A 30, B 70 facerent. $\frac{1}{3}$ A 10, $\frac{1}{5}$ B 14. summa 24. Si 32, partes essent A 90, B 10. $\frac{1}{3}$ A 30. $\frac{1}{5}$ B, 2. summa 32. Atq; heic uides uerum esse, quod in fine scholiastes obscurè dixit, & nos expreßimus, A aliquādo maius, aliquando minus esse quàm B. Iam quod A & B non dentur, nisi numerus qui poscitur minor sit maiore totius ea parte, qualis de parte A poscitur, maiore, ut 33$\frac{1}{3}$ heic est $\frac{1}{3}$ de 100. & maior minore, qualis heic $\frac{1}{5}$ de 100 est, 20: facile senties. Ponas enim flagitari 20. Erit 60 † 2 N || 100. & porro factà detractione æqualium 2 N || 40. ergo 1 N 20, quintans de B. ergo B erit 100. A autem o. quod est absurdum. Pone 18 posci. erunt 54 † 2 N || 100. fit 1 N 23. ergo B erit 115, maior toto. quod est impoßibile. Rursum pone flagitari 33$\frac{1}{3}$. eius triplum 100. ergo 100 † 2 N || 100. & 100. utrinq; detractis, 2 N || 0. quod est absurdum. Fac postulari 35. ergo 105 † 2 N || 100 utrinq; 100 reiectis 5 † 2 N || 0. quod est itidem absurdum. Itaq; uel nulla fit uera æquatio, uel pugnat cum hypostasibus seu argumento problematis. Notabis & hoc, Diophantū uitandarum minutiarum gratia, non ipsum B, sed eis quintantem 1 N fecisse. Quod ipsum de A licuit facere. sit enim eius $\frac{1}{3}$, 1 N. ergo A est 3 N. Porrò 30 —— 1 N est $\frac{1}{5}$ de B. ergo 150 —— 5 N est B. adde A, summa 150 —— 2 N || 100. Adde utrobiq; 2 N, aufer utrinq; 100, fiūt 2 N || 50. ergo 1 N. 25. & 3 N 75. A. Subieci autem alias etiam operationes.*

**I.**

A 1 N. Ergo
30 —— $\frac{1}{3}$ N est $\frac{1}{5}$ ex B. ergo
5

150 —— $\frac{5}{3}$ N est. B
adde A. 1 N

Summa 150 —— $\frac{2}{3}$ N || 100
Adde utrobiq; $\frac{2}{3}$ N, & aufer utrinq; 100.
50 || $\frac{2}{3}$ N

150 || 2 N
A 75. 1 N
B 25.

**II.**

Vel B 1 N. ergo
30 —— $\frac{1}{5}$ N est $\frac{1}{3}$ A
3

90 —— $\frac{3}{5}$ N A.
adde B. 1 N

90 † $\frac{2}{5}$ N || 100
Abijce 90 utrinq;
$\frac{2}{5}$ N || 100

2 N || 50
1 N || 25. B.
Heic est Diophantea proximà.

III.

*Aliter æquatione ad numerum qui poscitur accommodata.*

*A. 1 N. B. 100 —— 1 N. Adde $\frac{1}{5}$ N. & 20 —— $\frac{1}{3}$ N.*
*Summa 20 + $\frac{2}{15}$ N || 30. & utrinq; abiectis*
*20 $\frac{2}{15}$ N || 30. multiplica utrunq; per 15*

*2 N || 150. ergo 1 N 75. A. 25 B.*

*Vel B 1 N. A 100 —— 1 N. Adde $\frac{1}{3}$ N ad*
*$33\frac{1}{3}$ —— $\frac{1}{4}$ N. Summa $33\frac{1}{3}$ —— $\frac{2}{15}$ N || 30.*
*Adde utrobiq; $\frac{2}{15}$ N & aufer utrinq; 30. fiet*
*$\frac{2}{15}$ N || $3\frac{1}{3}$*

*2 $\frac{10}{3}$*

*2 N || 50. 1 N. 25. B. &c.*

*Nota cum $\frac{2}{15}$ per 15, $3\frac{1}{3}$ multiplicaueris, ut proportio maneat incolumis, 10 per 15, & 2 per 3 denominatores debuissent multiplicari. Sed cum 3 ad 15 sint ut 1 ad 5, 10 per 5, 2 per 1 multiplicato idem rectiùs est effectum. Canonem heic nullum pono. cùm per regulam multo simplicius & breuius id genus quæstiones soluantur, quam per canones, quos multiplices & perplexos formari oportebat.*

VI. Datum numerum in duos partiri, ut prioris pars certa certam posterioris partem superet quanto iubebimur numero. Hunc autem minorem oportet esse eo, qui ad diuidẽdum nobis propositi numeri partem eam, quæ alteri præstare debet, exprimit. Partiamur ergo 100 in duos numeros, ita ut prioris quadrans posterioris sextantem 20 unitatibus superet. Pono sextantem posterioris 1 N. ipse ergo erit 6 N. Quadrans aũt prioris erit 1 N † 20, ipse itaq; 4 N † 80. Summa amborũ 10 N † 80, æqualis 100. Aufer similia à similibus, relinquuntur 10 N æquales 20. ergo 1 N est 2. Iã ad ea quæ posuimus te confer. sextantem posterioris statueramus 1 N, ipse ergo est 12. prioris quadrãs fuit 1 N † 20, scilicet 22, ergo ipse 88. manetq; hoc, huius quadrantem sextante illius maiorem esse 20 unitatibus. Ipsi autem coniuncti numeri, 100 propositum numerum restituunt.

## SCHOLION.

*Oportet utiq; interuallum partium, quadrantis ad sextantem, quod datur 20, minus esse quadrante numeri 100: quem quadrantem si uel æquet uel excedat interuallum, non succedet res. Id demonstrabimus de 25. Ponamus quadrantem prioris sextante posterioris maiorem esse interuallo 25. Cum sextans posterioris sit 1 N, & ipse 6 N, ergo quadrans prioris erit iam 1 N † 25. ergo prior ipse 4 N † 100. Summa numerorum 10 N † 100 æqualis 100. atqui si ab æqualibus æqualia aufero, supersunt 10 N æquales nihilo. quod est absurdum. Multo magis etiam incidet absurdum, si interuallum 26 aut amplius ponatur. Nam si 26 sit, 10 N † 4 æquabuntur nihilo. Notandum, quòd in præcedente theoremate postulatum numerum posuit inter duas partes propositi: heic tantùm minorem cum maiore parte postulat esse, ut liceat etiam usq; ad unitatem descendere.*

## XYLANDRI.

Vel æquet uel excedat.) *In Græco uerba sunt mãca, quæ sic lego ἔστι γὰρ καὶ ἴση, ἔστι ἄλλο τις. Cæterùm Diophãtus heic, ut solet, minutias uitauit. & orsus est à posteriore. Potuit etiã à priore. Cuius quadrans 1 N, ipse 4 N. Et quia quadrans 20 unitatibus excedit sextantem posterioris, 20 demtis de 1 N, sextans ille habebitur 1 N —— 20. ergo totus posterior 6 N —— 120. Hic priori additus, constituit summam 10 N —— 120, æqualem 100. additis utrobiq; 120, fit æquatio 10 N || 220. ergo 1 N. 22. & 4 N. 88, prior numerus, &c. Adieci autem in tironum gratiã quatuor alios modos soluendæ quæstionis, quorum bini in æquatione respiciunt ad totum diuidendũ, bini ad æqualitatem quæsitarum portionum, ratione interualli.*

*A 1 N. ergo* *Vel* *B 1 N. itaq;*
*$\frac{1}{4}$ N 20 est $\frac{1}{6}$ B.* *$\frac{1}{6}$ N † 20. est $\frac{1}{4}$ A.*

*$1\frac{1}{2}$ N —— 120 B.* *$\frac{2}{3}$ N † 80 est A.*

*6 2 adde*

*adde A. 1 N.*

$2\frac{1}{3}$ N — 120 || 100.
*omnia per 2 multipl.*
5 N — 240 || 200
*adde utriq; 240.*
5 N || 440
1 N *ergo* 88. *A. ergo*
*B* 12.

*adde B. 1 N.*

$1\frac{2}{3}$ N † 80 || 100
*subtrahe utrinq; 80.*
$1\frac{2}{3}$ N || 20
*per 3 multipl.*
5 N || 60
1 N. 12. *B. ergo A* 88.
*sic ferè Diophantus.*

ALITER.

*A* 1 N. *B* 100 — 1 N.
$\frac{1}{4}$ N. $16\frac{2}{3}$ — $\frac{1}{6}$ N.
20 *adde*
|| — $36\frac{2}{3}$ — $\frac{1}{6}$ N
*adde utriq;* $\frac{1}{6}$ N
$4\frac{5}{12}$ N || $36\frac{2}{3}$

5 N $\frac{110}{4}$
|| 440
1 N. 88. *A. &c.*

*Vel. B* 1 N *A* 100 — 1 N
$\frac{1}{6}$ 25 — $\frac{1}{4}$ N
*aufer* 20
5 — $\frac{1}{4}$ N || $\frac{1}{6}$ N
*adde utriq;* $\frac{1}{4}$ N
5 || $\frac{5}{12}$ N
*per 12 mult.*

60 || 5 N
1 N *ergo* 12. *B. &c.*

*Examen facile est, & in ipsa quæstiōis tractatione inclusum. Quadrans ex 88 est 22. Sextās de 12, 2. quæ à 22 detracta, relinquunt 20. ut postulabatur. Porrò quis nescit, 88 & 12 esse 100. Itaque non miretur lector, me plerunq; comprobationis adscriptioni supersedisse.*

VII. Inuenire numerum, à quo si auferātur duo dati numeri, residua eam seruēt, quæ poscitur, rationē. Iubemur ab eodem numero auferre 100, & 20, ut maius residuum minoris sit triplum. Esto is numerus 1 N. à quo si auferam 100, residuum est 1 N — 100: si 20, restat 1 N — 20. & cùm residuum maius minoris sit triplum, hoc ter sumtū maiori erit æquale. minoris residui triplū 3 N — 300, æquale 1 N — 20. defectus cōmunis utriq; addatur, fient 3 N æquales 1 N † 280. Auferātur etiā utrinq; similia, relinquūtur 2 N. æquales 280. & 1 N est 140. Iā secundū posita, numerū quæsitū statuerā 1 N. is ergo est 140. ab hoc aufer 100, supersunt 40: aufer 20, restant 120. quod residuum utiq; est alterius triplum.

SCHOLION.

*Quia inuentus est numerus 140: quando dicit, reliquus numerus est 1 N — 100: idē est ac si dicas, si ab 140 detexero 100, restāt 140 demtis 100, id est 40: si 20, restant 140 demtis 20, hoc est 120. & cum numerus demtis 20, id est 120, debeat triplum esse residui quod superest 100 de 140 ablatis, quod est 40: ergo ter sumtus minor, qui erat 1 N — 100, hoc est 40, æquatur 1 N — 20 maiori, scilicet 120. ter enim 40, faciunt 120. At minor ter facit 3 N — 300, hoc est 120. Sed quoniam nondum fuit expressum quot unitatib. constet 1 N, cū 3 N — 300 æquentur 1 N — 20, communem defectum utrobiq; adijcit. ita & 3 N fiunt integri & ab altera parte 1 N † 280. nam de 300 quæ adduntur, 20 defectum implent, & reliquum abundat 280. Deinde utrinq; auferūtur æqualia: non unitates, sed 1 N. cum ab una parte sint 3 N integri, ab altera 1 N † 280. abijcitur utrinq; 1 N (cùm amplius non possit) supersunt 280 & 2 N æqualia.*

XYLANDRI.

*Obseruabis id residuum esse maius, quod fit minore: minus, quod maiore detracto numero de proposito relinquitur. Cætera sunt plana.*

1 N. *quæsitus.*
1 N — 100 *residua* 1 N — 20
*minus.* *maius.*
3 N — 300 || 1 N — 20
*triplum.*
*Adde utriq;* 300

3 N.

*3 N || 1 N † 280.*
*aufer utrinq. 1 N*
*2 N || 280.*
*1 N. 140. hinc aufer* {100, 20} *restat* {40, 120} $\frac{1}{3}$.

IIX. Datis duobus numeris, alium inuenire, qui si utriq; datorum adijciatur, collecti eam habeant, quæ poscitur, rationem. Hanc uerò minorẽ esse oportet ipsa datorum numerorũ ratione. Sit ad 100 & ad 20 adijciẽdus numerus, ea lege ut maius collectu minoris sit triplum. Ponatur is esse 1 N. qui ad 100 additus, facit 100 † 1 N, ad 20, 20 † 1 N. cumq; maior summa minoris esse debeat tripla, hęc ter sumta maiorem æquabit, triplum minoris. est ergo 60 † 3 N. æquale 100 + 1 N. aufer ab æqualibus æqualia, relinquuntur 2 N æquales 40. & 1 N est 20. Ad propositum. 20 ad 100, fiunt 120. ad 20, 40. Est autem 120 triplum numeri 40.

SCHOLION.

*Oportet, inquit, rationem datam, hoc est quam summæ inter se habebunt, ut hic tripla est, minorem esse ratione quæ est datorum initio numerorum, ut 100 ad 20. hæc enim est quincupla, illa tripla. Est autem tripla minor quam quincupla ratio, ut & 3 minus quam 5. Nam si res ita non habeat, non succedet. Et quod numeris rationem quincuplam habentibus, 100 inquam ad 20, non possit eadem etiam collectorũ esse ratio, sic ostendemus. Adijciendus utriq; est 1 N, ita fient 100 † 1 N, 20 † 1 N. cumq; maior summa debeat minoris quincupla esse, huius ergo quincuplum maiorem æquabit. Ergo 100 † 5 N æquantur 100 † 1 N. & abiectis utrinq; æqualibus, relinquentur 4 N æquales nihilo, quod est absurdum. Augebitur hoc absurdum, si non parem, sed maiorem etiam rationem collectorum quam datorum statuas: ut uerbi gratia sescuplam. nam aliquot N & præterea eis adiunctæ unitates, æquabũtur nihilo. Notandum, in hac quæstione duplicem fieri detractionem, numerorum scilicet & unitatum. Primum de 3 N † 60 & 1 N † 100 æqualibus, utrinq; 60 abijcimus: relinquuntur 3 N æquales 1 N † 40. deinde cùm nondum quantus sit 1 N compertum habeatur, utrinq; 1 N auferimus. ita relinquuntur æqualia 2 N & 40.*

XYLANDRI.

*100 † 1 N. 20 † 1 N. hoc ter. 60 † 3 N || 100 † 1 N. aufer utrinq. 1 N † 60. reliqua æquatio 40 || 2 N. Aliud. Detur numerus, qui ad 12 & 18 additus, duplos constituat. fient 2 N † 24 || 1 N † 18. aufer utrinq. 1 N † 18. restat 1 N † 6 æqualia nihilo. Id fit, quia dupla ratio maior est quam sesquialtera, quæ est ratio terminorum datorum. Si autẽ iussisses summas fieri sesquitertias, quæ est minor, numerus inueniretur 6. qui additus utrinq., 18 & 24 constituit.*

*12 † 1 N    18 † 1 N*
*adde trientem suum*
*16 † 1$\frac{1}{3}$ N || 18 † 1 N. aufer utrinq. 1 N & 16*
*$\frac{1}{3}$ N || 2. facit 1 N 6. &c.*

IX. A' datis duobus numeris eundem auferre, ita ut residuorũ sit quam quis imperauerit ratio. maiorem tamen eam esse oportet ratione datorum numerorum maioris ad minorem. Sit & à 100, & à 20 auferendus idem numerus, ita ut residuum maius minoris sit sescuplum. Numerus subtrahendus sit 1 N, residua 100 — 1 N & 20 — 1 N. Et cum residuum maius sescuplum esse minoris debeat, huius sescuplum ergo illi æquale est. sexies 20 — 1 N sunt 120 — 6 N æqualia 100 — 1 N. Adijciatur quod deerat, utriq;, & auferantur similia utrinq;. tãdem habebis 5 N æquales 20. & 1 N est 4. Ad rem. 4 si à 100 detrahas, 96 relinquuntur: si à 20, 16. Est autem 96 residuum maius, minoris 16 sescuplum.

SCHOLION.

*Oportet, inquit, rationem datã, qualis heic est sescupla, maiorem esse ratione datorum maioris ad minorem, 100 scilicet ad 20, quæ est quincupla. Superat autem sescupla quincuplam. Nam si uel æqualis uel minor ratio residuorũ quam terminorum poneretur, quæstio non constabit. Si enim (ne eadem inculcemus) æqualis siue quincupla statuatur, consequens erit 4 N æquari nihilo. quod absurdum augebitur, si minorem quincupla rationem ponas. Quod de adijciendo utriq; defectu sit, cum æquentur 120. — 6 N & 100 — 1 N, quæritur de utro defectu sit intelligendum. Dicimus non heic modò, sed ubiq; in tali casu, maiorem defectum communiter addendum esse. Nam si minorem adijceremus, nondum aboleretur maior defectus: sed hoc addito, etiam minor tollitur. Ita hic maiore defectu 6 N ad-*

 dito,

*dito, fiunt 120 integrum: & 100 — 1 N fiunt 100 † 5 N, cum 1 N ob defectum aboleatur, 5 superstitibus. Nam defectus si excedatur à copia, ei additus defectum creat.*

XYLANDRI.

*100 —— 1 N    20 —— 1 N*
*6*
*120 —— 6 N*
*adde utriq. 6 N*
*100 † 5 N || 120*
*aufer 100 utrinq.*
*5 N || 20*
*1 N. 4.*
*100 / 4 / 96    20 / 4 / 16*
*6*

*Absurdi exemplum.*
*100 —— 1 N.   20 —— 1 N*
*Ratio quincupla residuorum.   quinquies.*
*100 —— 5 N*
*adde utriq. 5 N*
*100 † 4 N || 100*
*aufer 100 utrinq.*
*4 N || 0.*
*Ponatur residuorum ratio tripla.*
*100 —— 1 N || 60 —— 3 N*
*&*
*100 † 2 N || 60*
*40 † 2 N. & || 0*

*Greca uerba de defectu adyciendo erant mutila.*

X. Datis duobus numeris, eundem tertium maiori adimere, & minori addere, ut residui ad collectum sit quæ poscitur ratio. Sit idem numerus ad 20 addendus, & de 100 subtrahendus, ut maius minoris sit quadruplum. Numerus iste sit 1 N, quo ad 20 addito, fiunt 1 N † 20: à 100 detracto, 100 — 1 N. & cùm maius minori sit quadruplum, minus quater sumtum maiori æquabitur. Minus autem quater sumtum fit 400 — 4 N. id æquabitur 1 N † 20. Addatur communiter defectus, & æqualia ab æqualibus auferantur, emergunt 5 N æquales 380, & fit 1 N, 76. Ad rem. Addendus & adimendus datis, 1 N erat, id est 76. qui ad 20 adiectus 96 facit: de 100 subtractus, 24 relinquit. manetq; summa residui quadrupla.

SCHOLION.

*Heic, cùm dati initiò numeri 100 & 20 quincuplam rationem teneant, nihil interest æqualémne ei, an uerò uel maiorem uel minorem constituas rationem inter collectum & residuum futuram: si quidem ponas maiorem esse 20 † 1 N, minorem 100 — 1 N. Si uerò hunc contrà maiorem, illum minorem ponas, determinationem requiret quæstio hæc, ut ratio collecti & residui data semper minor ponatur ratione datorum initio numerorum, neq; æqualis ei, neq; maior. Exemplum subyciamus. Sit minor 20 + 1 N, maior autem 100 — 1 N, ac maior minoris ponatur quincuplus. Ergo quincuplum minoris, 100 + 5 N æquatur 100 — 1 N. & impleto quod deerat erunt 100 æqualia 100 + 6 N. abiectisq; utrinq; æqualibus, 6 N æquantur nihilo, quod est absurdum. Multo absurdius eueniet, si maior quincupla ponatur. Hanc quæstionem alio modo consideremus. Datis duobus numeris eundem tertium & maiori addamus, & minori adimamus, ut summæ ad residuum ratio sit quæ poscitur. Numeri dati rursum 100 & 20. huic adimatur, illi addatur idem numerus, & fit collectum residui septuplum. in tali enim casu, semper posterior ratio priore, quæ erat datorum maioris ad minorem (ut heic erat quincupla, 100 ad 20) maior sit oportet: semperq; is minor censebitur, qui defectum habet adnotatum: nunquam, qui abundat. Proinde numeri erunt 20 — 1 N & 100 † 1 N. heic maior, & illius septuplum. septies ergo 20 — 1 N, hoc est 140 — 7 N æquantur 100 † 1 N. Addatur communiter defectus, erunt 140 æqualia 100 † 8 N. auferantur æqualia utrinq;, erunt 8 N æquales 40, & 1 N erit 5. Is à 20 detractus, relinquit 15. additus ad 100, conficit 105, qui septies 15 continet. Cæterùm in Diophanti opere, cùm æquarentur 20 † 1 N & 400 — 4 N, defectus 4 N utriq; adiectus, fecit 400 integrũ, & ab altera parte 20 + 5 N. Abiecta sunt deinde de æqualibus æqualia, utrinq; 20: ita manserunt 5 N æquales 380.*

XYLANDRI.

*In huiusmodi quæstionibus duplex datur solutio, quia tam residuum collecti, quam collectum summæ potest fieri (uerbi gratia) quadruplũ. quod uoluit monere scholiastes, & subiecta exempla monstrant.*

Multo absurdius.) *Nam 20 + 7 N æquabuntur nihilo.*

Semperq; is minor censebitur.) *Hoc ipsa ratio dictat. Qui enim numerus per se maior altero erat, qui non superet auctus eum deminutum?*

Cæterum in Diophanti.) *Hæc adieci, quia in Græco quò pertinerent non erat expressum. Duplicẽ operationem Diophanti quæstionis accipe.*

*Minor.* *Maior.*

*Maior.* *20 † 1 N.* *100 —— 1 N* *Minor 20 † 1 N* *100 —— 1 N*

*4* *4*

*400 —— 4 N* *80 † 4 N*

*adde 4 N, & deme 20 utriq.* *adde 1 N utriq., & aufer 80*

*5 N || 380.* *5 N || 20.*

*1 N || 76.* *1 N. 4.*

*Collectum 96. residuũ 24. Collectum residui quadruplum.* *Collectum 24. residuum 96. Residuum collecti quadruplum.*

*Solutio quaestionis ab interptete positae.*

*Minor.* $\frac{20}{7}$ *—— 1 N.* *Maior 100 † 1 N*

*140 —— 7 N ||*

*adde 7 N utriq., & deme 100.*

*40 || 8 N. 1 N ergo 5. de 20, 15. ad 100. 105. ratio septupla.*

XI. Eidem numero duos alios, alterum addere, alterũ detrahere, ut collecti & residui sit quae poscitur ratio. Addam eidem numero 20, & detraham 100, ut collectum sit residui triplum. Sit numerus qui quaeritur, 1 N, huic si addas 20, adimas 100, fiunt 1 N † 20 & 1 N —— 100. triplũ minoris 3 N —— 300 equantur maiori 1 N † 20. adijce utriq; quod deest, & abijce utrinque aequalia: relinquentur 320 aequalia 2 N. Est ergo numerus qui quaeritur, 160. ac secundum proposita, maior 180, minor 60. maior minoris triplus.

SCHOLION.

*In decima quaestione cùm unitatib. idem numerus adderetur aut detraheretur: fiebat ut aliquando is cui additum erat, aliquando is cui detractum, maior esset altero. Heic semper is cui additum est, maior habetur. Cõuerse enim heic res habet, quòd unitates certae eidem numero uel adduntur uel adimuntur. Isthic autem, cum non constaret quot unitatum esset numerus, non liquebat etiam uter utro maior esset. Verbi gratia sint duo numeri 2 & 10. illi numerus quidã addatur, huic idẽ detrahatur: erit alter 1 N † 2: alter 10 —— 1 N. Si 1 N sit 2, ille erit 4, hic 8. & maior is, cui detractum fuit. Si autem 1 N sit 5, ille 7 erit, hic 5: & maior is, cui aliquid additum est. At uerò heic cum eidem numero & addatur minor, & detrahatur maior: manifestum est semper maiorem fieri eum cui accessio facta est. Sed ne hoc quidem definitione opus habet: neq; si ab eodem minorem auferamus, & eidem maiorem addamus, ut si fiat 1 N —— 20 & 1 N † 100.*

XYLANDRI.

*Res nihil habet obscuritatis: cum numerus quantulamcunq; passus deminutionem, necessariò sit quàm antè minor, ne dum sibi auctum aequare possit.*

CANON. Si quidem multiplex ratio est proposita, multiplica detrahendum per nomẽ rationis, adijce addendũ, summã diuide p nomẽ rationis unitate deminutũ. *Detur numerus cui si 44 addas, & eidem detrahas 16, maius minoris sit quadruplũ. 4 in 16 duc, fiunt 64, adde 44. summa 108. diuide per 3. (cum ratio poscatur quadrupla.) habes 36 quaesitum numerum. Huiusmodi canonum ratio est ipse Algebrae processus.*

*1 N † 20. 1 N —— 100.*
*3*

*3 N —— 300*

*adde 300, aufer 1 N utriq.*

*2 N || 320. 1 N. 160.*

XII. Datum numerum in duos diuidere, idque bis: ita ut unus è priore diuisione prouenientium, cum uno ex altera prouenientium rationem quae requiritur cõstituat: itemq; petiram aliquam rationẽ etiam alter ad alterum. Iniunctum sit nobis,

 100 di-

100 diuidere in duos numeros, rursumq; eundem in alios duos: ita ut maior prioris diuisionis, duplus sit ad minorem posterioris: ac uicissim maior è posteriore diuisione, triplus ad minorem prioris. Esto minor posterioris partitionis 1 N, ergo maior prioris 2 N, ac proinde huius minor 100 —— 2. Cuius cum sit triplus qui est in posteriore partitione maior: is erit 300 —— 6 N. Superest, ut huius quoq; partitiõis numeri 100 faciant collecti. At conficiunt 300 —— 5 N, id ergo æquatur 100. Inuenies 1 N esse 40. Iam persequamur præscriptum. Maior prioris partitionis est 2 N. id est 80. ergo eiusdẽ altera pars 20. scilicet 100 —— 2 N. Maior posterioris 300 —— 6 N, nimirum 60. minor 1 N, id est 40. Et euidens est quæsiti commonstratio.

SCHOLION.

*Diuiditur heic 100 bis: semel in 80 & 20: iterum in 60 & 40. Estq; 80 duplus ad 40, & 60 triplus ad 20. numeris in quincuncem dispositis. Duo partitionis posterioris numeri 300 —— 6 N & 1 N coniuncti, faciunt 300 —— 5 N. cùm N unus, unius N defectum expleat 1 N. autem 40 ualet: sic. Inuentum est 300 —— 5 N ualere 100. adijce utriq; defectum. fient 300 integer, & 100 † 5 N. aufer à similibus similia, hoc est utrinq; 100. reliquuntur 5 N æquales 200. sicq; 1 N fit 40.*

XYLANDRI.

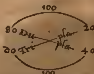
*Facilè apparet, 1 N uel maiori, uel minori, idq; tam prioris quàm posterioris partitionis numero poni. itaq; quater uariari operationem posse. Ego nullam, præter uerbis Diophanti debitã scribam: ne diffidere de studio lectoris uidear.*

*Maior. Minor.*
*2 N. 100 —— 2 N. I par-*

*300 —— 6 N 1 N. II titio.*
*300 —— 6 N*
*1 N adde.*

*300 —— 5 N || 100.*
*adde utriq; 5 N, adime 100*
*200 || 5 N. 1 N ergo 40.*

*Χιασμὸς siue decussatio, cuius meminit scholiastes, hæc esto.*




XIII. Ter diuidemus numerum propositum in duos numeros: ita ut unus primæ partitionis ad unum secundæ rationem quæ præscribitur habeat: reliquus secundę ad unum tertiæ, & reliquus tertiæ ad reliquum primæ eam habeant bini, quæ postulabitur seorsim, rationem. Partiamur 100 in duos numeros ter, ut maior primæ partitionis sit triplus ad minorem secundæ: maior secundę ad minorem tertiæ duplus: denique maior tertiæ ad minorem primæ, quadruplus. Ponamus minorẽ partitionis tertiæ 1 N, erit maior secundæ 2 N, & quia cum minore conficit 100, erit minor 100 —— 2 N. Cuius triplus cùm sit maior primæ: is erit 300 —— 6 N. ergo minor primæ erit 6 N —— 200. Cuius quadruplus cum sit maior tertiæ, erit is 24 N —— 800. Reliquum est, etiam tertiæ partitionis membra coniuncta facere 100. & 1 N est 36. Examinemus posita. Minor tertię diuisionis est 36. maior 64. Minor primæ 16, maior 84. Minor secundæ 28: maior 72. & manifestum est hos satisfacere proposito.

SCHOLION.

## SCHOLION.

*Tertium diuidẽdus est datus numerus in duos inæquales. Sic 100 diuisus est in 84 & 16, in 72 & 28, in 64 & 36. & est 84 ad 28 triplus: 72 ad 36 duplus: 64 ad 16 quadruplus. Cum autem maior primæ partitionis sit 300—6 N: quomodo minor eiusdem fiat 6 N—200, hinc sciri potest. Cum ambos esse simul 100 oporteat, & maior sit 300—6 N, oportet minorem haberet 6 N, ut horum defectum in maiore exsarciat. præterea minori deesse oportet 200, ut cùm 300 integer impleto defectu 6 N factus est: detracto ab eo 200 qui deerat, relinquantur adhuc præsentes 100 quanta est duarum partium summa. Porrò 25 N—800 æquantur eidem 100. & adiecto utrinq; quod deerat, 25 N integrum æquatur 900 & 1 N est 36. nam tantum exit, 900 per 25 diuiso. Cum ergo maior primæ partitionis sit 300—6 N, & 6 N faciant 216: si defectũ minoris partis, 200, huic subtrahas, minor erit 16. Maior secũdæ diuisionis est 72, nimirũ 2 N. Minor 100—2 N. & cum 2 N sint 72, hoc detractũ de 100. restat minor portio 28. Maior tertiæ est 24 N—800. & cum 24 N sint 864, hinc ablatis 800, is erit 64. minor autem 1 N, scilicet 36. Obseruandum, quòd si uelimus in decimatertia quæstione expeditè numeros inuenire, ne quid nobis molestiæ à minutijs exhibeatur: eum qui ter diuiditur, ponere debemus aut æqualem aut multiplicem numeris qui oriuntur compositione maioris & minoris numerorum tertiæ partitionis. Sicut heic diuisus est 100, numeri 25. at 100 sunt quadruplum ad 25. Nam si non fiat hoc, succedat quidem propositum, sed unitatem in minutias frangi oportebit. Rationes etiam non per interualla dissidentes nominum, sed continuè succedentes inuicem oportet sumi: ut duplam, triplam, ac deinceps. si enim post duplam, non triplam, sed quadruplã ponas: res non succedet. Id quoque dispiciendum est, ut semper à minima ratione ordiaris: id est ut maior secundæ partitionis minimam datarum rationum habeat ad minorem tertiæ, sicut heic est dupla: deinde maior primæ ad minorem secũdæ, triplam scilicet. deniq; maior tertiæ, ad minorem primæ, maximam habeat rationem: utpote quadruplam. Nam si inuerso ordine rationes ponantur, non succedet negocium.*

## XYLANDRI.

*In duos errores minimè dissimulandos interpres heic lectorem deuocat. Quorum prior fugã minutiarum suadens, & ad eam compendium (si dijs placet) ostendens, ui m logisticæ eneruat. Non enim ut formes elegantia & facilia exempla quæstionum, ideò potissimum logisticẽ disces, siquidem sapis, aut bene moneti credere potes: sed ut uel soluere, uel monstrato absurdo explodere possis problemata proposita. Itaq; tribunum aliquẽ censeo adeat scholiastes: nam à me quidem exceptionem istam nunquam impetrabit, ut ille ait apud Tullium. neq; enim hoc agitur ut amussis ad lapidem, sed ut lapis ad amussim dirigatur. & nemo peritus uel mediocriter harum rerum nescit, quantum plerunq; in ipsis minutijs sit compendij. Quod autẽ negat quæstionẽ posse ueram & legitimã esse, nisi nomina rationum continuo se ordine subsequantur: & quod hinc colligit, in opere semper esse ordiendũ à minima ratione, &c. horum utrunq; est uanum ac ridiculũ. Neq; heic instituam disputationem subtilem: sed καθόλου hominis data unica pro sexcentis instantia euertam. Priùs tamen Diophanti exemplum tractabo, hoc præfatus, cùm sex fiant numeri, in quorum binos 100 diuidatur: licere tibi sexies uariare operationẽ: tantùm abest ut 1 N cogaris minori tertiæ partitionis alligare: quòd qui scholiasta in mentẽ uenire potuerit mirarer, nisi uiderẽ fugã minutiarũ eum præter casam, quod aiunt, extulisse. Diophantea operationis hæc est ἔκθεσις.*

| | Maiores. | Minores. |
|---|---|---|
| Partitionis | prima 300—6 N | 6 N—200 |
| | secunde 2 N | 100—2 N |
| | tertia 24 N—800 | 1 N |



*Aequatio 24 N—800 & 1 N, hoc est 25 N—800 ∣∣ 100. nimirũ 25 N ∣∣ 900. facit 1 N 36. &c. (In his elementis additionũ, detractionũ, æquationũ, immoratur scholiastes explicandis: mallẽ alibi operã locasset.) Cætera liquent ex subiecta tabella.*

| | | Maior. | Minor. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Diuisio | I | A. 84. | B. 16. | A ad D tripla | ratio. |
| | II | C. 72. | D. 28. | C ad F dupla | |
| | III | E. 64. | F. 36. | E ad B quadrupla | |

De re-

*de reliquis unam duntaxat subycio, in qua B pono 1 N, & sequor hypostases, dum singulos numeros inueniam.*

| | | Maior. | Minor. |
|---|---|---|---|
| Partitio | I | 24 N—300 | 1 N. |
| | II | 200—8 N. | 8 N—100. |
| | III | 4 N. | 100—4 N. |

*Tandem maiorem primæ diuisionis compertum est esse 24 N—300. adde 1 N. ergo 25 N—300 æquantur 100. hoc est 25 N || 400 ergo 1 N. 16. Cætera piget referre. Sed censeri me etiam sic effugisse minutias, in quas non incides si à minorũ aliquo initium sumas: si tamen hoc est operæprecium? aut putas me iniuriam scholiastæ fecisse? Sed uideamus etiam posteriorus reprahensionis caput, hac adeò in quæstione tractanda. Diuidatur 180 ter in duos numeros, ita ut primæ partitionis maior ad secundæ minorem sit quincuplus: secundæ maior ad tertiæ minorem sesquiplus siue sesquialter: tertiæ maior ad primæ minorem, superquadripartiens decimas quintas, id est ut 19 ad 15. Nisi fallor, hæ rationes non sunt tales, quales noster imperabat, quarũ nomina continuato unitatis incremento se subsequerentur. Et tamẽ profectò quæstio sex ad minimum operationibus constanter συζήτησιν. Ordiamur à minore secundæ partitionis, seu D, quando ita libet, & hypostases, ut noster autor uocat, quasi tonis persequamur. Esto D (ne quid obscurum relinquat breuitas.) 1 N. ergo A 5 N. ergo B 180—5 N. C uerò dubium non est quin sit 180—1 N. quod cum sit ad F, ut 3. ad 2, F utique est $\frac{360-2}{3}$ N. Iam restat E quærendus, qui sibi inæqualis ipsi nunquam nimirum erit. Habebimus aũt duobus modis altero, si F ab 180 subtrahas, relinquitur E $180\frac{+2}{3}$ N. altero, per regulam proportionum. est enim E ad B ut 19 ad 15. Ergo si B per 19 multiplices, productum (uidelicet 3420—95 N.) per 15 partiare, quotiens E ostendet. nempe $\frac{684-19}{3}$ N. huic ergo æquatur E ante inuentum $180\frac{+2}{3}$ N. & abiectis denominatoribus (quod est, utroq; per 3 multiplicato, ut alibi docuimus.) 180 † 2 N || 684—19 N. & tandem 504 || 21 N. Facit 1 N 24. quod est D. ergo A 120, &c.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Partitio | I | A 120. | B 60 | A ad D 5. | |
| | II | C 156 | D 24. | C ad F $\frac{1}{2}$ | |
| | III | E 76. | F 104 | E ad B $\frac{1}{1}\frac{3}{5}$. | &c. |
| | | Maior. | Minor. | | |

*In hoc exemplo id quoq; dedita opera feci, ut æquationem alio quàm Diophantus quærerem artificio. tantoq; magis paterent diuitiæ huius artis, quas scholiastes circumscribere, & in arctũ cogere tantas copias nescio qui instituerat. Diligentibus credo me rem gratam fecisse. eos qui minutiarum compendia & ignorant, neq; uolunt discere, ut ἀμύητος planè hoc ex auditorio iubeo abesse. Abstine sus, tibi non spiro: dicebat amaracus.*

XIV. Inueniantur duo numeri, quorum multiplicatio unius in alterum, producat numerum cuius ad summam ipsorum sit quæ postulatur ratio. Oportet autem id quod ponitur pro multitudine unitatum unius numerorum, maius esse numero. à quo ratio postulata nomen suum habet. Mandatũ sit producti rationem ad summam debere esse triplam. Ponatur numerorum alter 1 N, alter (ut addita quæstioni conditio præcipit) maior quàm 3. puta 12. multiplicatio 1 N in 12 producit 12 N. additio summam 1 N † 12. Et cum huius triplum sit 12 N: ergo ter 1 N † 12, hoc est 3 N † 36 æquantur 12 N. & 1 N est 4. Proinde 4 & 12 numeri sunt, qui quæstioni satisfaciunt.

## SCHOLION.

*Oportet alterum numerorum maiorem poni numero qui denominat rationem. Ita dantur heic numeri 4 & 12. quorum summa 16, productum 48, triplum summæ. nomen hæc ratio habet à ternario. hoc itaq; maior est alter numerorum. Hoc ergo dicit, alterum numerorum maiorem debere poni quàm 3, si ratio tripla: quam 4. si quadrupla poscatur, ac deinceps. alioqui enim res non succedet. Productum (inquit) est 12 N. nam N in se, Q facit ut 4*

gignit

*gignit 16: in unitates, N. ut nunc 4 in 12, faciunt 48, duodecies ipsum 4. nam cùm unitas immutabilis sit ac semper subsistat, species in eam ducta, suam retinet naturam. Ergo cùm 1 N in 12 multiplicetur, fiunt 12 N. nam si 1 N in 1 multiplicaretur, fieret 1 N; si in 2, 2 N. sic in 12, 12 N. Iam minus ter sumtum fiunt 3 N † 36, aequalis 12 N. aufer utrinq; 3 N, restant 9 N aequales 36, & 1 N 4.*

XYLANDRI.

*Huiusmodi quaestiones non unam, sed complures solutiones admittunt, maximè in minutijs. & cùm alter numerorum 1 N ponitur, perinde est qualem numerum absolutum alterius loco ponas, modò minor ne sit nomine rationis postulata, néue aequalis ei. Nam si heic posuisses numeros 1 N & 3 summa 1 N † 3. productum 3 N. huic aequabitur summa triplum 3 N † 9. & abiectis utrinq; 3 N, 9 aequabuntur nihilo. Item si posuisses 1 N & 2. ut alter nomine rationis minor esset, aequarentur 3 N † 6 & 2 N. & utrinque remotis 2 N, 1 N † 6 aequaretur nihilo. Posuit ergo Diophantus 1 N, & 4. atque adeò generalem Canonem heic rationũ consideratio & operis suggerunt, quem adscribere non piget.*

CANON. Si quaerantur duo numeri, quorum producti ad summam detur ratio: unũ adde rationis nomini, & habebis alterũ. alter fit, nomine rationis in eũ ducto.

*Verbigratia, quaeruntur duo numeri, quorum productum sit undecuplum ad summam. adde 1 ad 11, habes 12, alterum, si 12 per 11 multiplices, scilicet 132. Summa est 144, productũ 1584, per eam diuisum, quotiens 11. Quod non modò de multiplicibus intelligi uelim, sed de alijs etiam quibusuis tandem rationibus. Ponam exempla singularum, tu (si lubet) periculum facito. Sit ratio postulata* $\frac{1}{5}$. *erunt numeri* $1\frac{1}{5}$ *&* $\frac{6}{25}$. *productum* $\frac{36}{125}$. *tantundem fit si summam eorum per* $\frac{1}{5}$ *multiplices. Ratio* $\frac{2}{3}$. *numeri* $1\frac{2}{3}$. $1\frac{1}{9}$. *productum* $\frac{50}{27}$. *tantundem fit summa* $2\frac{7}{9}$ *per* $\frac{2}{3}$ *multiplicata. Ratio* $1\frac{1}{3}$. *numeri* $2\frac{1}{3}$ $3\frac{1}{9}$. *productum* $\frac{196}{27}$. *idem fit summa* $5\frac{4}{9}$ *per* $1\frac{1}{3}$ *multiplicata. Ratio* $2\frac{1}{2}$. *numeri* $3\frac{1}{2}$, $8\frac{3}{4}$. *productum* $30\frac{5}{8}$. *tantum fit etiam summa* $12\frac{1}{4}$ *in* $2\frac{1}{2}$ *ducta. Verùm, ut dixi, eidem quaestioni diuersa numerorum paria possunt satisfacere. & si in Diophanteo exemplo nõ 4, sed 6 posuisses alterum numerum, inuenisses 6 & 6. summa 12. sexies autem sex, 36. triplum. si 10, numeri fuissent* $4\frac{2}{7}$ *& 10. summa* $14\frac{2}{7}$, *triplum eius* $42\frac{6}{7}$. *atqui tantundem fit si* $4\frac{2}{7}$ *per 10 multiplices. Verùm de his satis.*

XV. Duos inuenire numeros, ut si uterque ab altero certum numerũ accipiat, collecti utrinque ad residuũ sit ea, quae poscitur, ratio. Postuletur ut prior acceptis à posteriore 30, duplus sit ad id quod huic relinquitur. posterior autem acceptis à priore 50, triplus sit eius quod huic superest. Ponamus posteriorem esse 1 N & praeterea 30, quod debet priori dare. Ergo prior erit 2 N —— 30. ut 30 acceptis, duplum posterioris habeat. Restat ut posterior acceptis à priore 50, triplũ eius habeat, quod hic retinet. Prior, si à se det 50, erit 2 N —— 80. haec 50 si posteriori accedant, erit 1 N † 80. atque hoc est triplum ad 2 N — 80. huius ergo, ut minoris, triplum 6 N — 240, aequatur 1 N † 80. fit 1 N denique 64. erit ergo prior 98, posterior 94: ijsq; soluitur proposita quaestio.

SCHOLION.

Ergo prior.) *Cùm posterior sit 1 N † 30. haec 30 huic demta & addita primo, faciẽt ut reliqui posterioris duplus sit prior. reliquum 1 N. ergo prior erit 2 N. ergo antè defuerunt ei 30, quae à posteriore accepit: est ergo prior 2 N — 30. hoc est, cùm posterior sit (ut in fine patesit) 94. erit prior 98, ut adsumtis 30, quibus demtis 94 fiunt 64, ipse sit 128, residui duplus. Rursum prior (inquit) si posteriori det 50, cùm iam antè ei 30 defuerint, iam alia 50 amittat, in residuo habebit 2 N — 80. & posterior ad 1 N † 30 adsumtis 50, erit 1 N † 80. reliqua ex descriptione liquent. Item prior dat posteriori 50, retinet 48. & illum facit 144, sui triplum residui.*

XYLANDRI.

*Duo heic Diophantus tironi obseruanda docet. alterum, non semper aut ubique nos ad 1 N ponendum adstringi: alterum, quam uocant Quantitatis aut secundarum radicum regulam, interdum optimè dissimulari. Ratiocinatio autoris est satis perspicua, itemq; examen. Itaque unicã subijciam, exercitationis rudiorum causa. Esto A 1 N. cui si accedant 30, fient 1 N † 30 duplum eius quod B retinet. retinet ergo* $\frac{1}{2}$ *N † 15. at 30 amiserat: ergo totus B est* $\frac{1}{2}$ *N † 45. Aufer ab A, 50. restant 1 N —— 50. huius triplum 3 N —— 150. huic aequatur quod fit 50 ad B addito, scilicet* $\frac{1}{2}$ *N † 95. adde utriq; 150, & adime* $\frac{1}{2}$ *N, aequantur 245 ||* $2\frac{1}{2}$ *N, seu 490 || 5 N. fit 1 N, 98, &c. Poteras etiam pro B ponere 1 N, &c. id tibi mando. descriptionem nihil opus fuit margini adijcere, in re manifesta.*

XVI. In-

XVI. Inueniantur tres numeri, ita ut bini faciant eos quos poſceris numeros. Oportet autem ſummæ eorum qui poſcuntur ſemiſſem quouis trium iſtorum eſſe maiorem. Conficiant ergo primus & ſecundus 20. ſecundus & tertius 30. tertius cũ primo 40. Ponamus ſummam horum trium eſſe 1 N. cumq; A & B cōficiant 20, hoc de ſumma omnium detractũ, relinquet C, 1 N—20. Ob hæc eadem, A erit 1 N—30, & B 1 N—40. Hi tres coniuncti reſtat ut conficiant 1 N. at faciunt 3 N—90, æquales 1 N. ergo 1 N eſt 45. Iam perſequere propoſitum. Erit A 15, B 5, C 25. & euidens eſt demonſtratio.

S C H O L I O N.

*Oportet (inquit) trium qui poſcuntur numerorum ſummæ ſemiſſem maiorem eſſe quouis iſtorum. Summa triũ imperatorum in hoc propoſito eſt 90. ſemiſsis 45. eoq; trium quiuis minor eſt. Si enim horum trium unum ponamus æqualem eſſe ſemiſsi eius ſummæ: non ſtabit argumentum. Ponamus c & a facere 50. erũt ergo tres ſimul 100, utpote 20, 30, 50. ſemiſsis de 100 eſt 50. & cum demonſtratio eodem procedat modo, ſecundum oportebit eſſe 1 N—50. quod eſt abſurdum. Multo etiam minus congruet uero, ſi maior ſemiſſe aliquis illorum ſumatur. Nam ſi 1 N ponatur, uerbi gratia, 55: ſecũdus erit 1 N—60.* Ob hęc eadē.) *Id eſt, quia b & c faciunt 30, erit a 1 N—30. cumq; c & a faciant 40, b erit 1 N—40. Ergo tres coniuncti, facient 3 N—90, quod æquatur 1 N. additoq; utrique defectu, & ablatis æqualibus, 90 æquantur 2 N. fit 1 N, 45.*

X Y L A N D R I.

*Secundum oportebit.) nam cùm ſumma ſit 1 N. & C A facit 50 ex hypotheſi falſa, B erit 1 N—50. Tres ergo erunt, A 1 N—30. B 1 N—50. C 1 N—20. ſumma 3 N—100 æquales 1 N. fiet 1 N 50. ergo B erit nihil. In poſteriore abſurdo, ponamus C A eſſe 55, amplius ſemiſſe numerorum. Erunt A 1 N—30. B 1 N—55. C 1 N—20. ſumma 3 N—105 æquales 1 N. fiet 1 N 52 $\frac{1}{2}$. Ergo B erit 52 $\frac{1}{2}$—55. quod eſt abſurdum. Scholia heic ſunt deprauata. Cæterùm abſurditates propoſitorum ſemper ipſa arguit operatio. Ad rem quod attinet, neq; Algebram heic exempla, multo minùs regulam quantitatis requirunt: cùm euidens ſit ſi imperati numeri in unam colligantur ſummam, quemuis eorum qui quæruntur numerorum in ea bis, ſi tres: ter, ſi quatuor: quater, ſi quinq; de numeris agatur, & ſic deinceps, ineſſe. Summa ergo per hunc quotientem diuiſa, uera omnium ſumma prodit. à qua ſi ſubtrahatur quod alij coniuncti habent, quod ſupereſt reliqui quantitatem illicò monſtrat. Itaq; etſi per Algebram uariè ſoluuntur huiuſmodi problemata, & autoris methodus eſt ſatis elegans: tamen Diophanteum ego, aliudq; noſtrum hoc fretus, quem deſcripſi,* CANONE, *expediam.*

*A & B 20* *Vides duo A, duo B, duo C? ergo 90 eſt duplum ſummæ omnium. deinde per 2, ha-*
*B & C 30* *bes ſummam omnium 45. Hinc aufer A & B 20, reſtat C 25. id à 40 (C A.) au-*
*C & A $\frac{40}{90}$* *fer, reſtat A 15. quod à 20 (A B) detractum, B relinquit 5. Additione facilè deprehendes, abundè ſatisfactum quæſtioni.* Aliud. *Habent quinq; ſocij ſummam denariorũ A.B.C.D.E. Ita ut A.B.C.D, habeant 40. B C D E 43. C D E A 38. D E A B 39. E A B C 32. Quæritur quantum ſimul omnes, quantum ſinguli habeant. uides cuiuſq; numerum quatuor poni, uel litterarum indicio. Collige datos numeros. ſumma 192. in hac ergo. ſumma omnium quater ineſt. ergo denarios uniuerſi habent 48. aufer A B C D, habet E 8, ut uides ſubiectum oculis.*

$$\text{À ſumma 48 aufer}\left\{\begin{array}{l} A\,B\,C\,D \\ B\,C\,D\,E \\ B\,D\,E\,A \\ D\,E\,A\,B \\ E\,A\,B\,C \end{array}\right\}\text{reſtat}\left\{\begin{array}{l} E.\ 8. \\ A.\ 5. \\ B.\ 10. \\ C.\ 9. \\ D.\ 16. \end{array}\right.$$

*Aliter. Quinq; ſunt numeri, A.B.C.D.E. Iuncti A B C faciunt 24. B C D 35. C D E 33. D E A 29. E A B 23. Quæritur idem quod antè. Vides unumqueq; numerum ter poſitũ eſſe. ergo omnium ſumma ter ineſt in ſumma datorum, quæ eſt 144. ſumma ergo omnium 48. & ydē qui antè numeri. quod potes experiri an ſit uerum.*

XVII. Quatuor numeros inuenire, quorum trini coniuncti conficiant quos quis poſtulauerit numeros. dummodò iſtorum quatuor numerorum triēs quouis ipſorum ſit maior. Statutũ ſit ordine ijs expoſitis, primum & duos deinceps 20 cōficere: ſecundum & duos deinceps, 22. tertium & duos deinceps, 24. quartũ & duos deinceps, 27. Summa horum quatuor numerorum ſit 1 N. unde ſi auferas 20, puta tres primos, reſtat quartus 1 N—20. Atque eadem de cauſa primus erit 1 N—22,

ſecundus

ſecundus 1 N—24, tertius 1 N—27. horum quatuor ſumma debet eſſe æqualis 1 N. atqui eſt 4 N ——93. id ergo æquat 1 N. isq; eſt 31. Ergo iuxta propoſita primus 9. ſecundus 7. tertius 4. quartus 11. Atq; hi ſufficiunt quæſtionis explicationi.

SCHOLION.

*Cùm de tribus ageretur numeris, trium datorum ſemiſſem aiebat quocunq; illorum debere eſſe maiorem. Nunc quatuor propoſitis numeris, de triente hoc aſſerit. nam ut ibi 1 N erat ſemiſſis trium, ita hic 1 N eſt triens quatuor numerorum: & ſi quinq; eſſent numeri, 1 N eſſet quadrans eorum. ac ſic deinceps. hæc enim methodus in infinitum procedit. Heic ergo cùm de quatuor numeris ſit negocium; quemcunq; de his æqualem feceris trienti ſummæ datorũ: cùm ipſe 1 N ſit triens, & numerorum quemuis oporteat defectu certi numeri conſtitui: qui ſui ipſius totius defectu conſtituetur: (quòd hic accidet) utiq; nihil erit: & nos numerum quærentes, nihil inueneri mus.*

Atque eadem de cauſa.) *Hoc eſt, cùm B C D faciant 22, erit A 1 N —— 22. & cùm C D A faciant 24, erit B 1 N —— 24. & cùm D A B faciant 27, erit C 1 N —— 27. Ac tandem fit 1 N, 31. additis & detractis iis, quæ ratio æqualitatis addenda aut detrahenda monſtrat.*

XYLANDRI.

*Certè à noſtri uniuerſalis canonis (quem ſatis multis annis commenti ſumus ante quàm uel Diophanti uidendi ſpem ullam imaginari poſſemus, uel aliorum lucubrationes uidiſſemus) ab eius ergo inuentione parum, adeoq; proximè abfuit ſcholiaſtes. Quorſum attineret heic ludere, & chartas implere Algebricis operationibus? ſic ergo nos quæſtionem explicamus.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *A* | *B* | *C* | *20* | *triplum ſummæ quæſitorũ. quod uel dinumeratis litteris ſentias. his* |
| *B* | *C* | *D* | *22* | *enim perſpicuitatis gratia uti expedit uera ſumma. 31. aufer 20, habes D 11 aufer 22. habes A 9. &c. Omnia enim ſunt plana: & ſcho-* |
| *C* | *D* | *A* | *24* | *liaſtem uellem ſemper tam commodè ſcripſiſſe. Porrò autẽ huc cõfer,* |
| *D* | *A* | *B.* | *27* | *quæ ad propoſitionem quintam libri tertij infrà annotauimus, & ad* |
| | | | *93.* | *decimamquintam quarti.* |

XIIX. Tres numeri ſunt inueniendi, quorum bini iuncti tertium quanto poſcitur numero ſuperent: Superent primus & ſecundus tertium numero 20. ſecundus & tertius primum 30. tertius & primus ſecundum 40. Ponamus iſtos tres numeros eſſe 2 N. Et cùm primus ac ſecundus tertium ſuperent 20, addito tertio ſumma omnium numerorum erunt bis tertius, ac prçterea 20. Ergo ſi à 2 N, ſumma omniũ, detrahas 20, reſtabit 2 N —— 20, quod eſt duplum tertij. Eſt ergo tertius 1 N —— 10. Has ipſas nimirum ob cauſas primus erit 1 N —— 15, & ſecundus 1 N —— 20. Reſtat ut horum trium ſumma ſit 2 N. atqui eſt 3 N —— 45. huic ergo çquatur 2 N, fit 1 N 45. Ergo iuxta præſcriptum quæſtionis, primus eſt 30, ſecundus 25, tertius 35. & hi ſatiſfaciunt quæſtioni.

SCHOLION.

Addito tertio.) *Nam ſi ſint aliquot numeri, alio aliquo maiores: ſi is & eis adijciatur, & ſibijpſi: quanto numero ipſi coniuncti eum excedebant, tanto & ſumma ipſorum & eius qui adiectus eſt, duplum adiecti ſuperabũt. Sint tres numeri 3. 4. 5. quorum 3 & 4 iuncti, puta 7, binario excedunt 5. Hunc ſi illis, item ſibijpſi adjciam: fiunt 12 & 10. ac rurſum 12 binario plus eſt quàm 10. Quod ſi quinq; denuo utrinq; adijciantur, erunt 17 & 15, exceſſus 2. idq; in infinitum procedit. atq; idem fit ſi primum reliqui, aut mediũ extremi ſuperent. Hoc ergo eſt quod de addito tertio dicebat. Verùm perſpicuitatis cauſa, in propoſita quæſtione idem oſtendamus. 1 N inuenitur 45, & ergo ſumma numerorum trium eſt 90. Sed & exceſſus dati, ſummam conficiunt 90. Et cùm primus ac ſecundus tertio præſtent 20; nam primus 30, & ſecundus 25 conficiunt 55, 20 amplius quàm tertius 35. ſi hic addatur & ſibi & ad 55, fient 70 & 90. Iam hic quidem eſt ſumma trium numerorum: quæ quanto ſuperat tertij duplum 70, nimirum 20: tanto etiam excedebant duo priores tertium ſemel ſumtum. Et ſi à 2 N, puta 90 auferam 20. habebo duplum tertij 2 N —— 20, id eſt bis 35, ſeu 70. Nam 70, ſi ei adderentur 20, eſſet 90: eſtq; 70 idem quod 2 N —— 20. Cùm autem tertium ſimplicem non potuiſſet inuenire: poſtquam eum duplicando inuenit, deinde ſimplicem ponit, qualem requiſierat. Ob eadem etiam primus duplus inuẽtus 2 N —— 30, ſimplus eſt 1 N — 15, ſiue 30. Et ſecundus duplus 2 N —— 40, ſimplus 1 N —— 20, ſeu 25. Ex deſcriptione porrò euidens eſt, quibus interuallis numeri ſe ſuperent.* Theorema.

XYLANDRI.

*Diligenter conſiderandum eſt hoc theorema, cuius uſus etiam in difficiliorib. eſſe poteſt quæſtionibus. Vide decimamquintam quarti huius. Deinde ſuperſedere regulæ Quantitatis perplexitate ſæpe licet hæc conſideranti & uſurpanti. Alioqui enim ſic erat agendum, ſint A & B*

C iuncti

*iuncti 1 N. ergo C erit 1 N —— 20. ex hypothesi. Ponamus A esse 1 Q. erit B 1 N —— 1 Q. huic adde C, habebis 2 N —— 1 Q —— 20, cui aequetur 1 Q † 30. (nam 30 addi ad primum oportuit, ut summa secundi atq; tertij conficeretur.) Ergo communibus de addendis & subtrahendis quae utrinq; par est noticijs adhibitis, 2 Q sunt 2 N —— 50. & 1 Q, hoc est primus, erit 1 N —— 25. id si de 1 N. (summa A & B.) auferas, relinquitur 25. tantus est B. Caetera sunt in promptu. Adde A & C, habes 2 N —— 45. tantū esse oportet, si 40 ad B addas. ergo 65 aequantur 2 N —— 45. siue 110 aequantur 2 N. ergo 1 N est 55. Itaq; A est 55 —— 25, scilicet 30. &c. Quod 2 N summam omnium posuit autor, non 1 N, fecit fuga minutiarum. de qua alio diximus loco. Ad descriptio-*
Descriptiões. *nes quod attinet, quarum scholiastes meminit: sunt sanè in Graeco scripto singulis problematis sua quas uocamus operationes ordine exposita atq; ad marginem adscripta. uerum has omisi, nō modò quod operosum admodum sit tales typos formis aeneis imitari: sed multo magis, quod in ipso contextu, scholijs, & nostris adeò annotationibus abundè ea, & perspicuè repraesentantur. nam typos nos quoq; suis locis inseruimus. De quo tamen monēdum lectorem duxi. ut & de hoc, 2 N poni, uitandarum causa minutiarum. alioqui licebat 1 N uti.*

XIX. Idem alia uia & ratione. Cùm primus & secundus tertium superent numero 20, ponamus tertium esse 1 N ergo primus & secundus iuncti, faciēt 1 N † 20. Rursus cum secundus & tertius primo amplius habeant 30. pono secundum 25, nempe semissem numerorum 20 & 30. cumq; primus & secundus sint simul 1 N † 20, secundo ablato, primus restat 1 N —— 5. Restat ut tertij & primi summa medium contineat, & praeterea 40. atqui ea summa est 2 N —— 5. hoc ergo aequatur 65. & adiecto utrinque defectu 2 N aequantur 70. & 1 N. 35. Et cum primus statuatur 1 N —— 5, is utique erit 30. reliqui iam sunt inuenti.

SCHOLION.

*Tot unitates secundo tribuit, quot unitatum est in medio situs duorum excessuum hoc loco Si enim quotcunque*
Theorema. *numeri ordine exponantur, ita ut quocunq; eorum reliqui coniuncti summam maiorem constituant: sumanturq; duo excessus, quibus seorsim reliqui unum aliquem superauerunt: quod in medio est huiusmodi duorum excessuum, semper numerum ostendet, ad quem reliquorum excessus non est relatus. Exemplum. Sint 3 numeri 20, 30, 40: ac sint quocunq; eorum reliqui coniuncti maiores. & sit excessus 20 & 30 iunctorum supra 40, 10: excessus 30 & 40 iunctorum supra 20, 50. medium horum excessuum, puta 10 & 50, est 30, numerus ad quem reliquorum excessus non est comparatus. nam ad 20 & ad 40 aestimatus fuit excessus caeterorum: ad hunc nequaquam. Rursum excessus 30 & 40 supra 20, est 50. excessus 40 & 20 supra 30, est 30. Medium horū excessuum est 40, ad quē reliquorum excessus non fuit collatus. Deniq; excessus 40 & 20 supra 30, est 30. excessus 20 & 30 supra 40, est 10. medium horum excessuum est 20. ad quem numerum excessus reliquorum relatus non fuit. Demonstremus idem de quatuor numeris: hi sint 20. 30. 40. 50. Excessus numerorum 20, 30, 40, supra 50, est 40. excessus 30, 40, 50, supra 20, est 100. medium inter excessus 100 & 40, puta 70, nimirum coniuncti duo 30 & 40, ad quos reliquorum excessus aestimati non fuerunt. Similiter eueniet si medium excessuum qui sunt 30, 40, 50 supra 20, & 40, 50, 20, supra 30. sumatur. ac deinceps. quater enim hoc in quatuor numeris deprahenditur, sicut*
Aliud theorema. *ter in tribus: & in quinq; quinquies, ac sic deinceps. Sic etiam proponi potest. Datis duobus quibuscunq; numeris, interuallum eorum idem est cum semisse summae ipsorum. Numeri 4 & 10, summa 14, semissis 7. dico hunc esse medio loco inter 40 & 10. quot enim unitatibus 4 à 7, totidem 7 à 10 abest. Et quidem expositis quotcunq; numeris arithmetica progressione, summam omnium exprimens numerus partem aliquotam habebit cognominem numero terminorum istius progressionis: hoc est, si tres fuerint numeri, trientem: si quatuor, quadrantem, ac deinceps. Et pars ista, medius erit terminorum. Sint ita expositi numeri quinq;, 2, 4, 6, 8, 10. Summa omnium 30: cumq; sint quinq;, 30 habebit quintātem, quae est 6. isq; est terminorum in ordine medio loco situs. Ita enim duo quoque numeri coniuncti. ut suprà demonstratum fuit, 4 & 10, summam componunt 14, quae partem aliquotam habet à terminorum numero, qui est 2, denominatam $\frac{1}{2}$. ac 7 is est, qui in medio duorum stabat, etiam si id nondum sentiretur: quia binarius medio caret. His ita constitutis, denuò exponantur tres numeri, in quibus ostendamus, si duo excessus coniunganttur, semissem summae numerum esse inter eos situm medio loco, & eum, ad quem excessus nō sit comparatus: quod fuit demonstratum. Sint numeri 20, 30, 40, excessus 20 & 30 iunctorū supra 40, est 10. excessus 30 & 40 supra 20, est 50. Duo numeri 10 & 50 coniuncti sunt 60: is ergo partem à binario denominatam habet, quae est semissis, 30 scilicet, medius inter 10 & 50. Enimuerò isti tres numeri arithmetica progressione expositi, cùm summam 90 constituant: is trientem habebit, uidelicet 30, medio loco positum in serie trium. Ergo propter istaec omnia, arithmeticae scientissimus Diophantus pronunciauit; Quando primus & secundus tertium superant numero 20: secundus & tertius primum numero 30: cùm sint duo excessus 20 & 30: euidens est,*

secundum

*secundũ (ad quem nulla facta est excessus reliquorum cõparatio, & qui medius sit inter 20 & 30, seu semissis summæ eorum quæ est 50, & habet semissem, nimirum 25.) esse 25. Ergo cùm ait, se tot unitates secundo assignare, quot unitatibus semissis summæ 20 & 30 constat: non temere hoc aut utcunq; facit: neq; enim heic eadem, quæ in N positione, licentia locum habet. Hunc enim, cùm quot unitatum sit N ignoretur, suo arbitratu haud abs re ponit. At ubi expressa est unitatum alicuius numeri congeries: non ut sors obtulit, sed ut arithmetici ordinis ratio flagitat, talem numerum statuit. Nos autem hinc ducto ratiocinandi argumento, per absolutos numeros, nihil ad hoc opus habentes Algebricis seu denominatis, quæstionem explicabimus. Cùm primus & secundus tertium excedant numero 20: secundus autem & tertius primum 30: erit ergo secundus horum excessuum dimidium, hoc est 25. Rursus cùm secundus & tertius primum excedant in 30; tertius & primus secundum in 40: erit ergo tertius horum excessuũ semissis, utpote 35. Deniq; cùm tertius & primus secundo habeant amplius 40; primus & secundus tertio 20: semissis horum excessuum erit primus, nimirum 30. Diophantus autem hoc sic construit. Tertium quæsitorum ponit 1 N. & cùm primus ac secundus eum numero 20 excedant, iuncti hi erunt 1 N † 20. Quorum cùm alter inuentus sit, secundus nempe, 25: (ea quam demonstrauimus ratione) à summa detractus hic, primum relinquit 1 N —— 5. Nam si ab 1 N † 20, auferendum sit 25, hoc est 20 & 5. 1 N manebit, sed cui desint 5. Et cùm summa tertij ac primi debeat secundum, ac præterea 40 continere: duoq; illi conficiant 2 N — 5: hoc ergo æquatur 65. Cùm enim demonstratum sit secundum esse 25, & tertium ac primum eo amplius 40. constat eos præstare totum secundum & 40 insuper. sunt autem 25 & 40 uidelicet 65. Quæ porrò proposita sunt, addendo & diuidendo inuenies.*

XYLANDRI.

*Huiusmodi quæstiones, qualis est decimaoctaua, in sequente aliter tractata, ostendunt quid rei sit logisticen uelle profiteri, ignarum arithmeticæ subtilitatis. Vulgus logistarum per regulã quantitatis ea absolueret, non nullo labore, ut ostendimus. Diophantus admodum subtilis, fretus numerorum progreßionem arithmeticam habentib. proprietatis consideratione: modico negocio rem planam fecit. Hypotheses aũt eius scholiastes fidelißimè & copiosè est demonstrando persecutus: boniq; interpretis perfunctus munere mihi probißimè uidetur: uellemq; mihi hanc ipsius collaudandi facultatẽ semper obtulisset. Nolo hic uarijs operationib. expositis morari lectorem: hoc moneo, in ijs pulcrè theoremata interpretis in conspectum uenire. quod studio & industriæ lectorum cõmendo explorãdum. Enimuerò quod omissum est & à Diophanto, & à scholiaste: à nobis autem & inductione, & rationib. pridẽ compertum, quas cũ theorematis scholiastæ* CANON
*easdem esse nunc demum animaduertimus: commodè uideor subiecturus. In huiusmodi quæstionibus semper eadẽ est excessuũ, quæ ipsorum qui quæruntur numerorum summa. Neq; id tantũ* alius noster.
*intelligere debes de ijs, in quibus excessus progreßionem arithmeticam constituunt, quod fit in Diophanteo casu, sed etiam de quibusuis alijs, citra exceptionem. Itaq; multo est amplior noster Canon: & quo modo scholiastes autoris propositum extra Algebram soluit, eo fretus quem demonstrauit canone, Quod nimirũ excessuum duorum semißis, eum numerũ exhibeat, ad quem nullus reliquorum excessus est cõparatus: eodem nos omnia soluemus. Sint uerbi gratia tres numeri A, B, C. A & B simul, 21 amplius quã C. B & C simul, 45 amplius q̃ A. C & A iuncti, 9 amplius q̃ B. Excessus 21, 45, 9. (quod sciã) arithmeticam progreßionem constituũt nullam: summã uerò 75. quanta etiã erit ipsorum numerorum. quo posito, citius etiam quæstio explicabitur. Nã si (ut Diophãti rationem priorem sequar) 21 de 75 auferas, duplũ tertij habebis 54. ergo tertius 27. Si 45 de 75 auferas, duplum primi habebis, qui est 15, cũ residuum fuerit 30. Aufer de summa omniũ summã primi & tertij, 27 & 15, hoc est 42 de 75, relinquitur 33, secundus. Idẽ inuenitur. 9 de 75 subtractis, cùm residuum 66 sit secundi duplum. Idẽ etiam per excessuũ binorum semißẽ omnino fiet, etsi excessus isti neutiquã arithmetica progreßione cohæreant. Quod (ne putes ad unũ exemplum astringi canones) alio breuiter exẽplo mõstrabimus. Tres mercatores societatem inierunt: neq; mihi significatũ est uel sors uniuscuiusq;, uel omniũ etiã caput quantũ esset. tamen id accepi, A & B sortes, 50 amplius fuisse librarum q̃ C. at B ac C sortes, 230 amplius q̃ A. C & A sortes, sorte B ampliores fuisse 150. Certè hi excessus 50, 230, 150, arithmeticã progreßionem nullam unquam cõstituent. summa est 430. eademq; etiam numerorum qui quæruntur. Atq; hoc quidẽ patebit: tametsi nõ ad summã, ut antè, sed ad medios binorũ excessuũ referatur ratiocinatio. Etenim (nihilo seciùs, q̃ si arithmetica progreßio ipsorũ excessuũ fuisset) excessus 230 & 150 summã faciũt 380. cuius semißis numerũ C ostẽdit, ad quẽ neuter excessuũ referebatur. Et eadẽ ratione excessus 150 & 50 iũcti, suo semisse A repræsentabũt: 50 & 230 itidẽ B. est aũt A 100, B 140, C 190 quemadmodum esse, deprehẽdes ubi uoles. Obseruabit igitur hoc loco harũ rerũ nõ socors mirabilẽ quandã & occultã uim progreßionis arithmeticæ. de qua alibi quicquã traditũ legere non memini.*

XX. Quatuor numeri sunt inueniendi, quorum terni iuncti reliquum superent eo qui requiritur numero. Oportet autem datorum quatuor numerorum interualla habere semissem, maiorem quouis ipsorum numerorum. Postuletur, ut primi, secundi, ac tertij summa quartum excedat numero 20. Secundi tertij, ac quarti, primū 30. Tertij, quarti, ac primi secundum 40. Quarti, primi, ac secundi tertium 50. Ponatur summa quatuor numerorum 2 N. & cùm primus, secundus, ac tertius quartum superent numero 20: & eodem numero quatuor iuncti superent duplum quarti: quatuor autem iuncti conficiant 2 N; ergo 2 N duplum quarti superāt numero 20. & duplum quarti est 2 N ——20. ergo quartus, 1 N ——10. His ipsis de causis etiam primus est 1 N ——15: secundus 1 N —— 20: tertius 1 N ——25. Restat ut horum quatuor summa sit 2 N. atqui est 4 N ——70. Ei ergo æquatur 2 N. & 1 N est 35. Ergo iuxta præscriptum quæstionis numeri sunt primus 20, secundus 15, tertius 10, quartus 25. ijq; respondent conditionibus quæstionis.

S C H O L I O N.

*Haud abs re conditio hæc adiecta est. Nam si qua de quatuor excessio, earum omnium summæ semissem æquet: locus proposito nullus erit. Numerus enim is, quo reliqui æquales semissi quatuor excessuum numerum superabunt: is ergo tantus emerget, quantus etiam erit 1 N —— eo numero, qui ipsi 1 N debebitur. Verbi gratia, 1 N erit 50. & idem hoc pacto fiet 1 N —— 50. atqui is quidem nihil erit: hoc enim relinquitur, ubi totum de toto aufertur. Augebitur autem absurdum hoc, si maior etiam semisse omnium excessuū aliquis eorum ponatur. Ductus huius quæ-* Conditio. *stionis tractandæ, idē est qui duodenigesimæ. Hoc obseruandum est, Quod ut in XIX propositione, ubi de trib. numeris & excessibus agitur, nulla sit opus conditionis præscriptione: ita cum de quatuor agitur, necesse est summæ excessuum semissem, quouis illorum esse maiorem: si de quinq;, trientem: si de sex, quadrantem. ac sic deinceps, ut semper binario absit nomen partis de summa excerptæ, à numero terminorum. Sicut nomen quadrantis binario excedit binarium, quintantis ternarium, sextantis quaternionem. Cùm autem tractatio huius quæstionis eadem sit, quæ est propositionis undenigesimæ; sicut illam, ita hanc quoq; conabimur nudis numeris demonstrare. Cùm primus, secundus, & tertius quartum numero 20 superent: quartus autem, primus, & secundus tertium 50: erunt coniuncti primus & secundus 35. Rursus cùm secundus, tertius, quartus iuncti ultra primum habeant 30. tertius autem, quartus & primus ultra secundum habeant 40; erunt tertius & quartus iuncti 35. His ita constitutis, cùm primus & secūdus, ac rursum secundus & tertius (id est primus ac tertius semel, & secundus bis) conficiant 60: ac primus & tertius sint 30: ergo duplum secundi est 30. ipse ergo est 15. Rursus cùm primus & secundus sint 35, & secundus 15: ergo primus est 20. item cum secundus & tertius sint 25, & secundus 15: ergo tertius est 10. Deniq; cùm tertius & quartus sint 35, ac tertius sit 10: utiq; quartus est 25.*

X Y L A N D R I.

*Quod attinet ad absurdum, quod accidit neglecta cōditione quæ quæstionem circumscribit, quiuis potest supputando experiri: & hactenus satis multa exempla sunt proposita. Porrò sicut tribus hoc modo propositis numeris, excessuum summa semper eadem est quæ numerorum, siue excessus arithmeticam habeant, siue non habeant progressionem: ita si de quatuor agatur, prorsus excessuum summa ad numerorum summam dupla est: si de quinq;, tripla. & sic deinceps. Et quod est in textu μεῖζον εἶναι ἑκάστου (sic enim legendū, non μείζονα & ἑκάστῳ ἑκάστου) αὐτῶν, ad numeros uel differentias referas, nihil interest: interpres de numeris accepit: autoris uerba ego reddidi. In eius exemplo excessus planè arithmeticam condunt progressionem. Sed sint A 2, B 5, C 7, D 13. A B C supra D excedit 1. B C D supra A 23. C D A supra B 17. D A B supra C 13. nimirū heic nulla est interuallorum æqualitas: nihilominus summa excessuum 54. summa numerorum 27 dupla est. Ratio aūt soluēdæ citra Algebram quæstionis, satis est commodè exposita à scholiaste. Sed si ad summam omniū referatur ratiocinatio, multo omnia erunt planiora & expeditiora.* CANON. Quorumcunq; trium excessum supra quartum à summa numerorum subtraxeris, residuum quarti est duplum. *Cætera typus te docet.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *A 20* | *A B C supra D, 20* | | *50.* | | *D* | *25.* |
| *B 15* | *B C D supra A, 30* | *de 70. relinquit* | *40.* | *ergo* | *A* | *20.* |
| *C 10* | *C D A supra B, 40* | | *30.* | | *B* | *15.* |
| *D 25* | *D A B supra C, 50* | | *20.* | | *C* | *10.* |

*Summa*

*Summa numerorum*    *70 excessuum summa 140*

*Eadem est ratio si plures sint numeri. neq; necesse poni exempla.*

IDEM ALITER.

XXI. Cùm primus, secundus, ac tertius iuncti quartũ excedant numero 20, esto quartus 1 N. ergo reliqui 1 N † 20. Rursus cùm secundus, tertius, & quartus iuncti primo amplius habeant 30: ponantur secundus & tertius iuncti tot unitatum, quot est semissis duorum excessuum 20 & 30. nimirum sint ambo 25. Et quia primus, secundus, ac tertius sunt simul 1 N † 20, hinc 25, utpote secũdo ac tertio subtracto, primus relinquetur 1 N —— 5. Iam cum secundus, tertius & quartus iuncti primum superẽt numero 30: ac tertius, quartus, & primus iuncti, ~~tertio~~ amplius sint 40: ergo tertius & quartus iuncti sunt 35. Et cùm quartus sit 1 N, erit tertius 35 —— 1 N. at secundus & tertius iuncti erant 25: inde aufer tertium, restat secundus 1 N —— 10. Reliquum iam est, ut quartus, primus, & secundus iuncti, 50 amplius sint quàm tertius. At coniuncti hi tres faciunt 3 N —— 15, & tertius 35 —— 1 N. Ergo 3 N —— 15 sunt 50 amplius quàm 35 — 1 N. Ergo 85 — 1 N æquantur 3 N — 15. fit 1 N 25. reliqua ex præscripto quæstionis absolue. Primus, 1 N — 5, erit 20: secundus 15: tertius 10: quartus 25. *secundo*

SCHOLION.

*Additio defectus heic fit bifariam, hoc modo. Cùm quartus, primus, & secundus iuncti faciant 3 N —— 15: & tertius sit 35 —— 1 N, cum 50: is erit 85 —— 1 N. adijcitur huic 3 N —— 15, non modo defectus 15, sed & defectus 1 N in altero. ita fiunt 4 N integri, cum defectus ad defectum, copiam gignat. & ad 85 —— 1 N nõ modò suus defectus 1 N accedit, sed etiam 15, ut fiat 100 integrum. itaq; 1 N fit 25.*

XYLANDRI.

*Rursum heic eadem, quæ suprà, annotanda erant: quod non placuit. Vides autem quàm expedita sit hæc operandi ratio. quàm contrà impedita & lubrica Quantitatis regula in hoc genere quæstionum. Ac libet quàm fieri potest scitissimè hoc problema per illã soluere: ut intelligat Lector non contemni tamen à nobis, quod postponitur potiori. Sit A 1 N, erunt B C D in summa ex hypothesi 1 N † 30. Ponamus iam B, 1 Q. ergo C D erunt 1 N † 30 —— 1 Q. Et cùm C D A sint 40 amplius quàm B, A ad C D adijce, 40 ad B. habebis æquationem inter 1 Q † 40 & 2 N † 30 —— 1 Q. ergo 1 Q utrobiq; adiecto 2 Q † 40 æquantur 2 N † 30. & 40 utrinq; abiectis 2 Q æquantur 2 N —— 10. ergo 1 Q est 1 N — 5. Habes B. id aufer de 1 N † 30, quæ est summa B C D 1 N † 30, relinquitur C D 35. Hoc repetendum est. Sit C, 1 R, erit D, 35 — 1 N. Adde A B D, & 50 ad C (nam tantum ei deest ad summã A B D implendam) fiet æquatio inter 1 R † 50 & 2 N † 30 — 1 R. deniq; 1 R inuenies esse 1 N — 10. id aufer de 35, superest D, scilicet 45 — 1 N. est ergo positionum hæc forma. A, 1 N. B, 1 N — 5. C, 1 N — 10. D, 45 — 1 N. Adde A B C, & 20 adde ad D ut illorum summam impleat, habes æquationem inter 3 N — 15 & 65 — 1 N. hoc est additis utrobique defectib. 80 æquantur 4 N. ergo 1 N est 20, A. proinde B quinario minus, &c. Non inelegans est hic ductus, fateor. sed nihil ad subtilitatem Diophanteam, aut ad canonis nostri breuitatem.*

XXII. Propositum numerum in tres alios partiri: ut uteruis extremorum adiuncto medio, ad reliquum extremum habeat quę postulatur rationem. Partiamur 100 in tres numeros, ut primus cum secundo tertij triplum: tertius cum secundo primi quadruplum constituant. Ponatur tertius 1 N. cuius cum triplum conficiant primus & secundus: hi ergo sint 3 N. Ergo tres iuncti facient 4 N. qui æquantur 100. & est 1 N 25. Ad præscriptum ergo tertius erit 25. primus & secundus iuncti 75. Rursum quia primi quadruplum faciunt secundus & tertius, pono primum 1 N, erunt secundus & tertius iuncti 4 N. summa omnium 5 N, æqualis 100. ergo 1 N 20 primus. At secundus & tertius, 80. atqui tertius est 25, ergo secundus 55. Hi satisfaciunt quæstioni.

XYLANDRI.

*Duabus positionibus autor exemplum absoluit, sanè quã eleganter, & ad regulam secundarum radicum declinandum accommodatè. Nam ex binorum ad reliquũ ratione, utriq; positiones sumuntur, quæ tots æquentur diuidendo.*

*A* } *B* } 3 *N* *rursum* *A* 1 *N*
*C* 1 *N* *B* } *C* } 4 *N*

*Summa 4 N* || *100.* *Summa 5 N* || *100*
*ergo C 25.* *ergo A 20. adde C, 45. de 100, relinquunt 55 B.*

*Poterat etiam aliter hoc fieri. nam cùm C sit 25. A & B erunt 75. Pone A 1 N. B 75—1 N. C. 25. Summa B C 100—1 N æquatur 4 N, ut quadruplo A. &c. Si libuisset per regulam Quantitatis soluere, posuisses A 1 N. B 1 Q. C 100—1 N—1 Q. & inuenisses quid 1 Q. esset, &c. Hoc aūt quod heic traditur, scitius multo est ac breuius. Scholiastes nihil heic habet.*

XXIII. Inueniantur tres numeri, quorum maximus mediū excedat minimi certa aliqua parte: medius minorem maximi data parte: minimus datam medij partē certo aliquo numero. Oportet autem medium tanta parte maximi præstare minimo, ut numero qui eam partem denominat in id quo medius minimo præstat multiplicato maior Numerorum existat multitudo quàm in medio. Constitutum sit, maximum medio præstare triente minimi: medium minimo maximi triente: minimum denario præstare trienti medij. Statuatur minimus 1 N, & præterea 10. quo scilicet numero medij trientem excedit. ut scilicet minimus compositus sit ex medij triente & 10. Vel sic, Statuatur medius 3 N. & cùm minimus debeat trientem huius excedere denario, is ergo minimus erit 1 N † 10. Restat, ut minimum medius superet triente maximi. superat autē eum 2 N——10 quantitate. hic ergo est maximi triens, & ipse maximus 6 N——30. Oportet autem maximum medio præstare triente minimi. at quo ei præstat, est 3 N——30. atque hoc esse debet triens minimi: ergo minimus est 9 N——90. idemq; erat 1 N †100. est ergo 1 N, 12 $\frac{1}{2}$. Ergo minimus est 22 $\frac{1}{2}$. maximus 45, medius 37 $\frac{1}{2}$. atq; hi sufficiunt explicandæ quæstioni.

S C H O L I O N.

*Conditio adiecta exemplo declaretur. Pars maximi de qua agitur, est triens. Excessus medij supra minimum 2 N—10. in hunc 3 multiplicatus, unde dictæ partis nomen: 6 N—30 producit, qui sunt plures N quā medij, qui est duntaxat 3 N. Idq; puto aliter fieri non posse.*

X Y L A N D R I.

*Et in ipsis numeris medij super minorem excessus est 15. cuius triplum 45. plus quā 37 $\frac{1}{2}$. Vitare potuit autor minutias, si cæteris omnibus saluis pro 10 posuisset 20. Numeri enim fuissent positorum dupli 90. 75. 45. Opus totum est Algebricum, & compendio institutū. Esto aliud propositum: Inuenire tres numeros quorum maximus semisse minimi medium superet: hic minimū quadrante maximi: minimus medij trientem numero 8. Sit minimus 1 N † 8. ergo medius 3 N, aufer minimum, restat 2 N—8, quadrans scilicet maximi. ergo maximus 8 N——32. Adde semissem minimi ($\frac{1}{2}$ N † 4) medio: habes 3 $\frac{1}{2}$ N † 4 æquale 8 N——32. Facit 1 N. 8. numeri 32. 24. 16. Heic 4 (nomen $\frac{1}{4}$ maximi, quo medius minorem superat) in medij supra minimum excessionem ductus, 2 N——8 gignit 8 N——32. & Numerorum unitates plures sunt quàm in medio. Cæterùm conditionis latæ causam ipse ductus Algebricæ huius operationis abunde explicat. Vtq; uideas non esse ociosam hanc conditionem, esto hoc problema. Dētur tres numeri, quorum maximus medium superet semisse minimi: medius minimū semisse maximi: minimus sit semißis medij auctus binario. Esto minimus 1 N † 2, ut medius sit 2 N. hinc aufer minimum, superest 1 N——2, semißis maximi. Est ergo maximus 2 N——4, quod est absurdum, cùm medius fuerit 2 N integri. Quod si positum fuisset, medium triente maximi præstare minimo, locum habuisset quæstio. fieret enim maximus 3 N——6, quod amplius esse potest quā 2 N si ualor numeri senarium excedat. Nam si sit (uerbi gratia) 8, erunt 2 N, 16. at 3 N——6 erunt 18, &c. Absoluamus sic correctā quæstionem. Aufer 2 N medium de maximo 3 N——6, restat 1 N——6, semißis minimi. Is ergo 2 N——12. at erat 1 N † 2. fit 1 N, 14. Numeri quæsiti 36. 28. 16. Quod experiri facile est. Nam 8, quibus maximus medium excedit, semißis sunt de 16, minimo. Et 12, quibus minimū medius superat, triens sunt ex 36, maximo. & minimus est 14, semißis medij † 2.*

XXIV. Inueniantur tres numeri, ut maximus medium superet data minimi parte; medius minimū data maximi parte: minimus datam partē medij dato numero.

Oportet

Oportet autem maximi partem eam dari, quæ adiecta minimo, Numeros pauciores conficiat ijs, qui pro medio numero ab initio ponebātur. Esto rursum minimus 1 N † 10. medius 3 N: ut huius trientem minimus superet denario. Iā cùm uolo maximum medio præstare triente minimi, qui triens est $\frac{1}{3}$ N † $3\frac{1}{3}$: hunc ad mediū addo, erit maximus $3\frac{1}{3}$ N † $3\frac{1}{3}$. Restat, ut medius quoq; minori, & trienti maximi iunctis sit æqualis. ij autem cōficiunt $2\frac{1}{9}$ N † $11\frac{1}{9}$, quod æquatur 3 N, medio uidelicet. & reiectis utrinq; æqualibus, $\frac{8}{9}$ N æquantur $11\frac{1}{9}$ N. Vtrunq; per 9 multiplicetur. Erunt 8 N æquales 100. & fit 1 N, $12\frac{1}{2}$. Eodē cum superiore hoc redit.

SCHOLION.

*Et quod heic addita conditio exprimit, existimo non posse aliter fieri: Sic autem heic fit. Triens maximi, & minimus, summam constant $2\frac{1}{9}$ N † $11\frac{1}{9}$ at $2\frac{1}{9}$ N minus sunt quàm 3 N, qui medio tribuuntur. Iam $2\frac{1}{9}$ N † $11\frac{1}{9}$ aii æquari 3 N. auferantur ergo utrinq; $2\frac{1}{9}$ N, restant ab una parte $11\frac{1}{9}$: ab altera 1 N minus nona sui parte, nimirum residuum est $\frac{8}{9}$ N, quod æquatur istis $11\frac{1}{9}$. Quia autem non per integros N & unitates integras progressa est demonstratio, sed per nonas partes utrinq; : ideò per nouem utrunq; multiplicat, ut fiant integri N & unitates integræ. Nouem enim nonantes (sic dixerim) cuiuscunq; tandem speciei, totam eius constituunt speciei unitatem. Sic 1 N minus nonante per nouem multiplicatus, fit 9 N — $\frac{9}{9}$. at nouem nonantes sunt unum. ergo multiplicando effectum est 8 N. Sed & $11\frac{1}{9}$ nouies sumpta, fiunt 99 & $\frac{9}{9}$: scilicet 100. unitate (quam $\frac{9}{9}$ faciunt) ad 99 adiecta. Atque sic 100 æquatur 8 N: & 1 N est $12\frac{1}{2}$. Quoniam autem nona pars inuenitur & in Algebricis, & in absolutis numeris: si minimum suppsius nouencuplum faciamus, id est 9 N † 90. erit medius 27 N, maximus 30 N † 30. Ac rursus minimus & maximi triens 19 N † 100. atq; hoc æquabitur 27 N. & 8 N. æquabuntur 100. & 1 N erit $22\frac{1}{2}$. Neq; ulla est pars demonstrationis, quæ non integris numeris, siue Algebricis, siue liberis, absoluatur.*

XYLANDRI.

*Sic autem heic fit.) Legi pro ὅμως, οὕτως. cùm planißimè Diophanteis hypothesibus respondeat, quòd heic repetitur. Atque hinc apparet ad Algebricos numeros eos, qui N nomen gerunt, respici. non ad solutionis numeros quæsitos. Quis enim neget $2\frac{1}{9}$ N minus esse, quàm 3 N. sed illi additur $11\frac{1}{9}$, quæ si adderentur æquanti aut superanti huncce 3 N, absurdum sequeretur. Nimis autem sollicitè heic quoque fugit minutias scholiastes. alioquin siue ante finem, siue in ipso fine fracta per denominatorem communem multiplices: idem est. semper enim & ubique locum habent decimaseptima & decimaoctaua septimi, aliaq; huc pertinētes & ad similia Euclideæ propositiones. Operationem (quia impingere possent rudiores) subieci.*

*C 1 N † 10.* — *ergo medius 3 N. Triens de C, $\frac{1}{3}$ N † $3\frac{1}{3}$, additus ad B, summā facit $3\frac{1}{3}$ N †*
*B 3 N* — *$3\frac{1}{3}$. ac tantus est ex quæstionis præscripto A. Huius adeò triens $1\frac{1}{9}$ N † $1\frac{1}{9}$ ad*
*A $3\frac{1}{3}$ N † $3\frac{1}{3}$.* — *C, qui est 1 N † 10, adiectus, B constituet. summa $2\frac{1}{9}$ N † $11\frac{1}{9}$. Eaq; æquatur 3 N, quantus est B. Si places scholiastem sequi, iam nunc omnia per 9 multiplicabimus fiunt 19 N † 100 || 27. & utrinq; reiectis 19 N: 100 || 8 N. & 1 N $22\frac{1}{2}$. Si ad finem pertendimus, utrinq; $2\frac{1}{9}$ N abijcimus. æquantur $\frac{8}{9}$ N || $11\frac{1}{9}$. hæc demum per 9 multiplicata, reddunt 8 N || 100 &c. Quod ostendendum duxi, ut lector uideret, utrum compēdiosius esset. De cætero liquet, quæstionem huius propositionis cum superiore eandem esse: conditionis dumtaxat expreßione, & uia conficiendæ rei differre.*

XXV. Tres numeri sunt inueniendi, quorum si quisq; proximè ipsum sequenti sui partem, quæ mandatur, dederit, inter eos qui dederunt & acceperunt æqualitas constituatur. Impertiat sui triente primus secundum: sui quadrante secundus tertium: sui quintante tertius primum: ut post hanc contributionem mutuam inter omnes sit æqualitas. Ponamus primum, concretum numerum talem, quia trientem debet dare, qui habeat trientem, puta 3 N. Secundum, quia quadrantem, 4 unitatum ponatur. Is si dederit, acceperitq; impetrata, manet 3 † 1 N. sequitur etiam primum, ubi dederit acceperitq; ea quæ mandantur, fore 3 † 1 N. At hic, si sui trientē dederit, & deinde acceperit 3 — 1 N, æqualis demū erit 3 † 1 N. Vnde liquet 3 — 1 N esse quintā tertij partē. est ergo tertius 15 — 5 N. qui & ipse suam quintā partē si dederit primo, & ipse acceperit 1, utpote quadrantem secūdi, erit 3 † 1 N. at si ab eo auferas 3 — 1 N, quintantem ipsius, restant 12 — 4 N. & si addas huic residuo 1, puta quadrantē secundi, fient 13 — 4 N æquale 1 N † 3. eritq; 1 N, 2. Ergo iuxta propositum primus erit 6, secundus 4, tertius 5. & constat propositum.

## SCHOLION.

*Trientem sui primus amittens 1 N, ac deinde recipiens 3 —— 1 N fit 1 N † 3, hoc pacto. Cùm amisit 1 N, habet adhuc 2 N. quibus si accedant 3 —— 1 N, erit 1 N † 3. nam —— 1 N abolet unum N de duob. N. nam defectus copiam accedens, facit defectum.*

## XYLANDRI.

*Scholion hoc nõ est integrũ: nõ magno cũ dispẽdio sciẽtiæ. In Diophanto aũt ipso est mẽdum, quod totã rẽ obscurat. ubi enim legitur μονάδων γ'. μονάδες, &c legendũ est μονάδων, ἔστω ἀριθμῶ ά. κ) μονάδων γ'. μονάδες ἄρα τρεῖς, &c. In hoc & simılib. exemplis semper memineris additioni anteire deminutionẽ. secus enim sicubi facias, nõ succedet negociũ. Sic enim res habet.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 —— 2 | } | est | { 4. | } adde | { 1 | } erit | { 5 |
| B | 4 —— 1 | } | | { 3. | | { 2 | | { 5 |
| C | 5 —— 1 | } | | { 4. | | { 1 | | { 5. |

*Quod scholiastes noluit interpretari, tale est. Ponit Diophãtus A esse 3 N. B. 4. Iã B amisso sui quadrante, unitate puta, fit 3. & addito triente primi, qui est 1 N, colligitur 3 † 1 N. Ergo tantundẽ fiet, si 1 N, ut trientẽ sui, adimas primo, & quintantem tertij residuo addas. 3 N detracto 1 N, sunt 2 N. hoc de 3 N † 1 sublatũ, scilicet ostẽdet tertij quintãtem 3 —— 1 N, qui ad 2 N additus, 3 N † 1 fecerat: notum est enim quæ sit inter additionem & subtractionem reciprocatio. cætera sunt plana. Porrò uel ex secundi positione facilè intelliges, arbitrio tuo posse te quotuis solutiones talium problematũ fabricari, uel in integris uel in fractis numeris. Nihil enim impedit, quin primum ponas 1 N, aut 12 N, aut quotuis. Et secundum si ponas 16, primum 3, solutionis numeri erunt ad nostros quatrupli. Sed industria Lectoris id comperiendũ relinquere malo, quàm in re facilima exponenda immorari.*

XXVI. Inuenito quatuor numeros, ea lege, ut cũ quiuis eorũ se cõtinuò insequẽti certã sui partẽ dederit: hac ultro citroq; facta detractione & additione, summarũ æqualitas exsistat. Primus secũdo sui trientẽ, tertio secundus sui quadrantẽ, tertius quarto sui quintantẽ, primo quartus sui sextantẽ tribuat: & cõtributione hac confecta, æqualitas exstet. Statuatur primus 3 N, ut triens eius haberi possit. Secundus 4 unitatũ, ut haberi quadrãs possit. Atq; hic, ubi quadrantẽ suũ abiecit, & primi triente postmodo est auctus, fit 1 N † 3. Ergo etiã primus suo triente amisso, adeptus deinde sextantẽ quarti, erit 1 N † 3. At amisso 1 N manẽt 2 N. Ergo sexta quarti pars, qua accepta fiat 1 N † 3, est 3 —— 1 N: quartus ergo 18 —— 6 N. Superest, ut quartus amisso sui sextante, ubi adsciuerit quintantẽ tertij, fiat 1 N † 3. at sextãte suo 3 —— 1 N spoliatus, retinet 15 —— 5 N. quod si ei addantur iã 6 N —— 12, fiet 1 N † 3. ergo 6 N —— 12 est quinta pars tertij. Tertius ergo 30 N —— 60. Tandẽ reliquum est, ut tertius abiecto sui quintante, deinde quadrãte secũdi auctus, faciat 1 N † 3. At quintante abiecto fit 24 N —— 48, quib. si iungatur quadrans secundi, erunt 24 N —— 47, æqualia 1 N † 3. Est ergo 1 N, $\frac{50}{23}$. & iuxta præscriptũ, primus erit $\frac{150}{23}$, secundus $\frac{92}{23}$, tertius $\frac{120}{23}$, quartus $\frac{114}{23}$. Abijciatur denominatio partiũ, erũt integri primus 150, secundus 92, tertius 120, quartus 114. qui & legib. quæstionis satisfaciunt.

## SCHOLION.

*1 N fit $\frac{50}{23}$ sic. Deprehensum est 23 N æquari 50. ergo 50 diuido per 23, fiunt $2\frac{4}{23}$. nã 2 in 23, fit 46: quatuor supersunt, quæ per 23 diuisa, ut in methodo partiendi ostensum est, fiunt $\frac{4}{23}$. Quia autem non ex diuersis forma Numerũ uult habere, puta ex unitatib. & minutijs: duas quoq; unitates inuẽtas resoluit in uigesimastertias particulas, nimirum in $\frac{46}{23}$, quibus adiectæ $\frac{4}{23}$, conficiunt $\frac{50}{23}$. Idem enim est dicere, 1 N esse $\frac{50}{23}$, uel esse cum $2\frac{4}{23}$. Partibus autem propositi sic satis fit. Ter 50, sunt 150. ergo cùm primum posuerimus 3 N, erit is $\frac{150}{23}$. Et cum secundus sit 4, erit $\frac{92}{23}$. nam quater 23 sunt 92. Tertius cum sit 30 N —— 60. quod ad 30 N attinet, erit $\frac{1500}{23}$. sed propter 60 subtrahendo, inde auferentur $\frac{1380}{23}$. nam sexagies 23, sunt 1380. supersunt $\frac{120}{23}$. tantus est tertius. Quartus ponebatur 18 —— 6 N. is propter 18, fit $\frac{414}{23}$. nam 18 in 23 faciunt 414. sed ob defectum 6 N auferre oportet*
De diuisione seu partitióe. *$\frac{300}{23}$ (nã sexies $\frac{50}{23}$ tãtum faciunt.) Est ergo quartus $\frac{114}{23}$. Vt aũt intelligas quomodo 1 N fiat $\frac{50}{23}$, id quoq; tenendũ est; siue maior numerus minorẽ, siue minor maiorẽ diuidat, numerum partium partiendo inuentarum semper cũ diuiso eundẽ fore: nomen aũt à partiente sumere. Verbi gratia, diuidamus 4 per 12, minorẽ per maiorẽ: dico cõpetere in quamuis unciam quatuor duodecima, qui est $\frac{1}{3}$ unitatis. & numerus quidem 4 idẽ est cum diuiso; nomen autem à partiente, duodecimarũ scilicet. Rursum partiamur 12 per 4, maiorẽ in minorẽ. proinde cõtingũt unicuiq; unitati qua-*

*ti quaternarij, duodecim quadrātes, id est 3. & heic 12 est numerus partium, idē cum diuiso. nomē autē quadrātum à partiente 4 ducitur. Ergo in hac quoq; proposita quæstione cum partiamur 50 maiorē numerum per 23 minorē, (maiorē dico. nā tametsi 50 & 23 N æqualia sunt, tamē absolutè 50 quàm 23 maior est numerus) unicuilibet unitati de 23 partes 50 attribuuntur uigesimætertiæ. & 50 numerus est partium, idē cum diuiso: nomen aūt à 23 partiente deductum. Quod si 23 per 50 diuisisset, cuiuis unitati ex 50, 23 quinquagesimæ obtigissent, numero partium 23, eodem cum diuiso: nomine deducto à partiente. Iam cùm unitas in 23 particulas sit distributa: quia secundus est positus 4: hunc in 23 duxit, & 92 inde orta pro secundo posuit: ac si numerus non $\frac{50}{23}$, sed 50 esset inuentus, quod idem in partib. quoq; reliquis propositis fecit. Cùm enim non soleat multis uti numeris in suis exemplis: ita etiā heic egit. & inuentis unitatis partibus, abijciatur, inquit, partiū denominatio: id est, cū 1 N sit $\frac{50}{23}$ inuentus, 50 illa iam non ut partes unitatum, sed ut integras unitates quinquaginta usurpa. Porrò æqualitas numerorū hæc est. Primus 150 amisso quem secundo dat suo triente 50, retinet 100. & acceptis 19, sextante quarti, fit 119. Secundus 92 amisso quadrante 23, quem tertio dat, retinet 69. & triente primi, 50 acceptis, fit 119. Tertius 120 quintantem suum 24 dans quarto, retinet 96, & acceptis 23 quadrante secundi fit 119. Quartus 114 sextantem suum 19 dans primo, retinet 95: & quintante tertij, id est 24 accepto, fit 119.*

XYLANDRI.

*Satis omnia sunt explicata. & uides ut euitandarum secundarum radicum gratia positio primi & secundi instituta sunt, quas, itemq; solutionem quæstionis infinities uariari posse, superiori propositione monui. Cæterum quòd multiplicibus integris, loco partium fractarum utitur abiecta omnium communi denominatione, id iure facit, ut doctrina proportionum testatur. Quæ enim partium cognominum, eadem totorum inter se, ac uicissim est ratio. Vide quintū Euclidis.*

XXVII. Inueniantur tres numeri, quorum quiuis si certam partem reliquorum côiunctorū accipiat, omnium exsistat æqualitas. Accipiat primus reliquorū summæ trientem: secundus summæ reliquorū quadrantem: tertius summæ reliquorū quintātem: itaq; fiant omnes æquales. Esto primus numerus 1 N: reliquis aliquot unitatum multitudo tribuatur, compendij gratia, trientem habens. Sintq; secūdus & tertius coniuncti 3. Et quoniam primus triente reliquorum auctus fit 1 N † 1. sumantur omnia quater. Quater ergo secūdus cū reliquis, est ter secūdus cū tribus uniuerfis. Atqui ter secundus adiunctis tribus fit 4 N † 4. unde si auferas 1 N † 3, relinquetur 3 N † 1, triplum secundi. Ergo secundus est 1 N † $\frac{1}{3}$. Oportet porrò tertiū adsumto reliquorum tanquam unius quintante, fieri 1 N † 1. Omnia sumantur quinquies, & eadem ratione inuenietur tertius 1 N † $\frac{1}{2}$. Restat ut hi tres coniūcti faciant 1 N † 3. Inuenitur 1 N, $\frac{13}{12}$. & omissa denominatione partis, fit primus 13, secundus 17, tertius 19. & implent conditiones quæstionis.

SCHOLION.

*Expositis quotcunq; numeris, si unus eorum aliquoties sumatur, reliqui omnes semel: rursumq; omnes unà cum ipso semel sumantur, ipse autem semel minùs quā priùs sumebatur: summæ utriusq; seriei erunt æquales. Sint numeri 2, 3, 4. sumantur 2 & 4 semel, & ternarius quater: fient 18. rursum 2. 3. 4. & ternarius ter, 18. summæ æquales. His ita cōstitutis,* Omnia, *inquit, fiant quadrupla: nimirū ubi loquitur de quadrāte, quincupla, ubi de quintāte. ac sic deinceps.* Omnia, *inquit: id est, & secūdus, & reliquorū duorū quadrans, quē adsumit. Et cùm reliquorū duorum quadrās ipsos duos numeros restituat: idē dicit, ac si dixisset, Sumatur secūdus quater, reliqui duo semel. Quādo aūt, ut suprà demōstrauimus, unus quater, & reliquorū quisq; semel positi, æquātur ter illi, & omnib semel sumtis: Ergo, ter secūdus, inquit, cū trib. adscitis, erit 4 N † 4. Quod uerò dicit, tale est. Cùm primus reliquorū duorū triente adscito factus sit 1 N † 1, necesse est etiā secūdū reliquorū duorū adsumto quadrāte, fieri 1 N † 1. Cæterùm quia ignoramus quātus sit reliquorū quadrās: & tamē hoc adiecto secūdus sit futurus 1 N † 1: quadruplicetur ergo & ipse, & reliquorū quadrās: id est, ipse quater sumatur, reliquorū uterq; semel: fient omnia 4 N † 4. cū quidē secūdus semel, & reliquorū quadrās, 1 N † 1 cōficiant. Iā cū idē sit secūdus quater & reliqui semel: atq; secūdus ter & tres singuli semel: si auferā tres numeros, hoc est, 1 N † 3 à 4 N † 4: (quod est ter secūdus, & tres semel) residuū erit triplū secundi, scilicet 3 N † 1. ergo ipse erit secundus 1 N † $\frac{1}{3}$. Idem spectemus in eo quod dicit,* Omnia sumantur quinquies. *Nam & heic similiter dicemus; Quinquies tertius adiunctis duobus, quater erit tertius unà cum tribus numeris propositis. Fient autem 5 N † 5. Vnde si auferas summam trium 1 N † 3, restat quadruplum tertij, 4 N † 2, ergo tertius 1 N † $\frac{1}{2}$. Primus porrò 1 N, secundus 1 N † $\frac{1}{3}$, tertius 1 N † $\frac{1}{2}$ coniuncti faciant 1 N † $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{2}$ (id est 1 N † $\frac{5}{6}$.) atq; hoc æquatur 1 N † 3. Aufero utrinq; 1 N & $\frac{5}{6}$. relinquuntur æqualis 2 N & 2 $\frac{1}{6}$. & fit 1 N, 1 $\frac{1}{12}$. Cùm autem heic duodecima pars inueniatur: liquet in duodecim uncias secari unitatem: & 1 $\frac{1}{12}$ sunt $\frac{13}{12}$. scilicet unitate in uncias secta, & uncia addita. Erit ergo unitas 12 unciarum, 1 N.* Theorema scitum.

autem

*autem 13 unciarum: & uncia superabit unitatem. Iam cùm emerserit $\frac{1}{12}$, eam in ternarium ab initio positum multiplicauit: ut fierēt 36, atq; ita 1 N procedet nō per partes unitatis, sed per unitates. Enimuerò sic abiecta partiū denominatione, ut pro $\frac{13}{12}$ usurpemus 13, idem poteris de canone,* Omnia quater, &c. *experiri: ita sanè, ut simul postulata quæstionis persequamur. Posito primo 13 unitatum, is reliquorum, qui sunt 17 & 19, iunctorū trientem accipiens, puta 12: fit 25. Oportet aūt secundū, 17, quadrante reliquorū iunctorū adsumpto, fieri 25. id sic fiet. Sumes 17 quater, id est 68: itē quadrantē reliquorū, 8, quater, habebis heic 32. hæc cōiuncta faciūt 100. Quod si 17 ter accipias, id est 51: & summā ipsorum trium, quæ est 49, detrahas à 100: relinquētur 51, scilicet triplum secundi. is ergo est 17. Eritq; 17 idē quod 1 N † $\frac{1}{3}$. scilicet 13 & 4. nam 4 est triens unitatis in 12 diuisa.*

XYLANDRI.

*Diligenter heic quoq; interpres id explicat, quod perobscurè à Diophanto fuit indicatū, & pro demōstrato usurpatū. Sed in Græco ipse canō mutilus est, quadā alia uitiosa. nostra trāslatio lectorē facilè expediet. Causa cur 13 pro $\frac{13}{12}$ uti liceat, superiore propositiōe est à nobis allata. Quod aūt interpres ait de numero 36. sic ēst intelligendum. Numeri a 1 N, b 1 N † $\frac{1}{3}$, c 1 N † $\frac{1}{2}$ sunt ex operatione Diophantea. quos si uelles interpretari (seu, ut loquuntur, resoluere,) posito 1 N esse 13. & statuere a esse 13, b 13 $\frac{1}{3}$, c 13 $\frac{1}{2}$, tota errares uia. resolui enim debent, per inuentū radicis ualorem, ac resoluti demum denominationem fractionis abijcere, ut pro integris habeantur. Ergo cum 1 N sit $\frac{13}{12}$, a. & unitas faciat $\frac{12}{12}$: triens unitatis faciet $\frac{4}{12}$, & 1 N † $\frac{1}{3}$, erit $\frac{13}{12}$ & $\frac{4}{12}$, hoc est $\frac{17}{12}$. & semissis unitatis $\frac{6}{12}$ ad $\frac{13}{12}$ adiectus, c conficiet $\frac{19}{12}$. Iam $\frac{1}{3}$ ex $\frac{17}{12}$ fieret $\frac{17}{36}$, ex $\frac{19}{12}$ triens esset $\frac{19}{36}$, &c. sed denominatione abiecta duodenæ partis, numeri sunt 13. 17. 19. & 17 ac 19 faciunt 36, quorum triens 12 ad 13 additus, facit 25. rursum 13 & 19 sunt 32, quorum quadrans 8 medio additus, reddit 25. Item 13 & 17 sunt 30, quorum quintans 6 ad 19 adiunctus, præstat 25. Non pigebit aliā huius exempli cōfectionē subijcere: qua utereris, si theorema illud* Omnia quater, *non esset in mente aut in promptu. Ponamus a esse 1 N, & b cū c simul 3. ut expeditè primæ parti quæstionis satisfaciamus, & primus cum reliquorū triente habeat 1 N † 1. Iam si b ponamus esse 1 q (sic enim nunc radicem secundam seu quantitatem ignotam libet notare) erit c numerū 3 —— 1 q. huius, & a trientem si adiungamus ad 1 q, erunt $\frac{3}{4}$ q † $\frac{1}{4}$ N † $\frac{3}{4}$ || 1 N † 1. & si omnia quadruplices, 3 q † 1 N † 3 æquabuntur 4 N † 4. ergo æqualibus utrinq; abiectis 3 q || 3 N † 1. & 1 q facit 1 N † $\frac{1}{3}$. hoc est secūdus, quem si à 3 auferis, erit c 2 $\frac{2}{3}$ —— 1 N. Huic quintam partē a & b, puta $\frac{2}{5}$ N † $\frac{1}{15}$ N adde, fiet 2 $\frac{11}{15}$ —— $\frac{3}{5}$ N, æquale 1 N † 1. Omnia si per 15 multiplices, habebis 41 —— 9 N || 15 N † 15 fiet 1 N $\frac{1}{12}$. & positiones numerorum reductæ, demum communē abijcient denominationem, eruntq; pro fractis integri. Variari solutionem posse huius problematis, satis constat ex suprà annotatis.*

XXIIX. Inueniantur quatuor numeri, ut cùm quisq; horum à reliquis trib. in unā summā collectis præscriptā partē acceperit, omniū æqualitas existat. Primus accipiat trientē reliquorū: secundus quadrantē: tertius quintantē: quintus sextantē. Eoq; cōfecto negocio, oēs numeri sint æquales. Statuamus primū 1 N. tres reliquos aliquot unitatū numerū, qui trientē habeat, sitq; 3. Ergo primus, ubi à reliquis in unū collectis numerū trientē acceperit, est 1 N † 1. Oportebit ergo etiā secundū, si à trib. cæteris in unā coactis quadrantē acceperit, fieri 1 N † 1. Rursum omnia quadruplicabimus: utemurq; methodo quā in præcedēte adhibuimus quæstione. Ita inueniemus secūdū 1 N † $\frac{1}{3}$. tertiū 1 N † $\frac{1}{2}$. quartū 1 N † $\frac{3}{5}$. At quatuor numerorū summa debet esse 1 N † 3. Omnib. cōfectis, 1 N fit $\frac{47}{90}$. Eritq; primus 47. secundus 77. tertius 92. quartus 101. Hi præstant ea, quæ requirit propositum.

SCHOLION.

*Quod 1 N deprehenditur esse $\frac{47}{90}$, id sic euenit. Quatuor inuentorum numerorum summa est 4 N, & $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{5}$: hæc æquantur 1 N † 3, quam omnium esse summam, ab initio fuit positum. Aufer utrinq; 1 N † $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{5}$. relinquuntur ab una parte 3 N, ab altera 1 & $\frac{2}{5}$ & $\frac{1}{6}$. Nam cùm sint tres unitates: ab harum una aufero $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{2}$, relinquitur $\frac{1}{6}$. Ab alia $\frac{3}{5}$ subtraho, relinquuntur $\frac{2}{5}$. Ergo tres Numeri æquantur 1 $\frac{1}{6}$. & $\frac{2}{5}$, & 1 N fit $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{18}$. $\frac{2}{15}$ (scilicet $\frac{2}{3}$ ex $\frac{1}{5}$.) cū singularum partiū denominationes per 3 multiplicari ratio iubeat. Enimuerò cùm quantus sit 1 N, non in integris, sed in fractis est inuentum unitatibus: fundum quæro horum numerorum, quib. fracta denominantur. id est, numerū qui omnes huiusmodi nominum partes habeat. Is autem est 90. Nam huius triens est 30 $\frac{2}{15}$ (scilicet quintantis bes.) est 12, cùm quintās sit 18. Pars decimaoctaua est 5. Iam 30. 12. & 5, sunt 47. & scinditur unitas in 47, estq; numerus $\frac{47}{90}$ unitatis, minor scilicet unitate: maior fit, abiecta denominatione. Quomodo aūt inueniatur fundus partes habēs requisitas, hinc intelligi potest. Exponātur numeri, à quib. partiū nomina sumūtur, & cōsidera primū & secundū:*

Inuētio numeri q partes habeat propositas.

qui

qui si primi inuicem sunt, duc alterum in alterum, productum appellabis fundum numerorum qui partes habent primo & secundo cognomines. Si uerò compositi sunt, productum diuide per communem eorum mensuram, quotiens fundus erit. Porro hunc ita inuentum fundum cum tertio compara, & eodem prorsus omnia modo confice. Exemplum. Fundum, siue numerum inuenire uolo qui habeat partes, semissem, trientem, quadrantem, quintantem. Expono numeros partiū cognomines 2, 3, 4, 5. Et cùm 2 ad 3 primus sit, multiplicatis ijs produco 6. quem fundum appello habentium semissem ac trientem: neq; alius minor ipso istas partes habebit. Iam 6 & 4 compositi inuicē, cōmuni mēsura, binario diuiduntur. multiplicatio eorum gignit 24: huius producti semissem, puta cognominem mensuræ communi, accipio 12. is est fundus habentium $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Rursus 12 per 5 multiplico, fiunt 60. qui, cum 12 & 5 primi inuicē sint, fundus dicetur habentiū partes $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. Alia ratio. ubi primi inuicem sint numeri, ages ut prius. Si uerò cōpositi occurrent, uterq; nimirū partē habebit cōmuni mensuræ cognominē. hanc alterius partē in alterū ducito, producetur fundus. rursumq; hunc cū tertio cōpara, ac deinceps ita perge. Queratur fundus habentiū partes $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$. Expono numeros his partib. cognomines 3, 4, 5, 6. & cū 3 ac 4 primi sint, productū eorū 12 aio fundū esse habentium $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. Rursus quia 12 & 5 primi sunt, ex ijs procreatum 60 dico fundū esse habentiū $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. Porrò cùm 60 & 6 cōpositi sint, & eorū cōmunis mensura ipse 6: uterq; eorū sextantē habebit, maior 10, minor 1. utrius ergo sextantem totū alterū multiplicauero, (siue 1 in 60, siue 10 in 6) rursum 60 fient. pronūcio itaq; 60 esse fundū habentiū $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$. ac sic deinceps. Ac tenendū est, duntaxat eos numeros qui sic inueniuntur, et eorū multiplices, nullū omnino aliū partes requisitas habere. Heic ergo cū agatur de $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$, & $\frac{1}{18}$. expono numeros, 3, 5, 18. Et cū 3 ad 5 sit primus, productus ex ijs 15, fundus est habentiū $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$. Rursus 15 & 18 cōpositi, cōmunem mensuram habent 3, & uterq; itaq; trientē: 15 scilicet 5, 18 aūt 6 Siue ergo 5 in 18, siue 6 in 15 ducas, 90 exsistet. & ob id unitas secatur in nonagesimas partes. Deniq; primus numerus, qui est 1 N, est 47. Secūdus 1 N † $\frac{1}{3}$, id est 47 & 30 (hic enim est triens è 90) fit 77. Tertius 1 N † $\frac{1}{2}$, id est 47 & 45 (qui est semissis de 90) fit 92. Quartus 1 N † $\frac{3}{5}$, est 47 & 54 (sunt aūt 54 de 90, $\frac{3}{5}$) scilicet 101. Et primus 47, cū 90, ut reliquorū triente, facit 137. Secundus 77, cum 60 quadrante reliquorū, facit 137. Tertius 92 cū 45 quintante reliquorum facit 137. Quartus 101 cum 36 sextante reliquorum, facit 137.

XYLANDRI.

*Huius exempli tractatio tota pēdet à superiori, & est satis fideliter à scholiaste explicata, nisi quod scholion sæpe est mutilū, & uitiatū: quod ex mea uersione restitui poterit, & rectius etiam intelligi.- Maior fit, abiecta denominatione.) ἐν δ' ἐν ἄλλαις μείζων est in Græco: nulla sentētia. Ego rē secutus sum. Fundum, πυθμένα, uocat minimum numerum, qui citra minutias habeat partes omnes quarum nomina proponuntur.*

XXIX. Datis duob. numeris inuenire tertiū, qui ductus in priorū utrūq;, alterum quadratū efficiat, alterū latus eius quadrati. Sint dati numeri 200 & 5. is aūt qui quęritur, 1 N. qui in 200 ductus, gignit 200 N: in 5, 5 N Et cū alter horū quadratū, alter eius quadrati latus debeat esse, 5 N in se multiplicati fient 25 q: æquales 200 N. Iā utrinq; Numeri charactere nomina deminuantur, erūt 25 N æquales 200, & 1 N fit 8. ac quæstioni is satis facit.

SCHOLION.

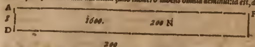
Quadrati 25 æquantur 200, &c. Si tres sint numeri, quorū secūdi in tertiū multiplicatione numerus fiat idē gerens nomen cū ratione quæ est primi ad tertiū: quod fit ductu primi in secundū, æquale erit quadrato eius quod ex secūdo in tertiū fiebat: atq; hoc rursum in tertiū ducto, producetur æquale primo Sint tres numeri, 36. 4. 3. 4 in 3 faciunt 12. & 36 ad 3 est duodecuplus, à 12 habēte nomē ratione. Ergo quod fit ex primo in secundū, 36 in 4, utpote 144, æquale est quadrato eius quod fiebat secundo in tertiū ducto. & quod è tertio ducto in id quod è secundo in tertiū fiebat producitur, 3 in 12, nimirū 36, æquale est primi. Ergo si numerus ad numerū habet aliquā rationē, & numerus utiq; erit aliquis qui in minorē ductus numerū gignat, denominantē maioris rationē ad minorem. Idq; exercitationis causa plenioris demonstremus in numeris fractis. Sint duo numeri 13 & 2, estq; ratio maioris ad minorē sescuplasesquialtera. erit ergo numerus, qui in 2 multiplicatus $6\frac{1}{2}$ (id enim rationis dictæ est nomē) producat. diuidatur $6\frac{1}{2}$ per minorē, 2 inquā, exsistent $3\frac{1}{4}$. hic est, qui in 2 ductus, $6\frac{1}{2}$ producat. Ac sunt tres numeri, 13. $3\frac{1}{4}$. 2. in quib. idē quod in prioribus liceat spectare. Primus in secundū producit $42\frac{1}{4}$ (nā ter 13, sunt 39. quib. additur $3\frac{1}{4}$, 13 quadrātes) secūdus in tertiū, gignit $6\frac{1}{2}$, cuius quadratū itidē $42\frac{1}{4}$. (Sexies 6, sunt 36. sexies $\frac{1}{2}$, 3. semissis de 6, 3. semissis de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Summa particularū $42\frac{1}{4}$) Et denuò $6\frac{1}{2}$ per tertium 2, multiplicatū gignit 13. Itaq; hic etiam cùm 200 ad 5 rationem habeant quadragintuplam, erit aliquis numerus, qui in 5 multiplicatus, 40 producat, unde rationi nomen est. Deinde 40 per 5, habes 8. Is multiplicatus in 200, producet 1600, quos uocat 200 N, quia 1600 hunc 8, ducenties continet. Idem 8 in 5 multiplicatus 40 gignit, quos uocat 5 N. nam 40 numerum 8 quinquies continet. Rursum 5 N. seu 40, in se ducti, faciunt q 25, id est 1600.

Nam

*Nam cum q de 8 sit 64, & 1600 uicies quinquies hunc 64 comprehendat: utiq; 25 q sunt 1600, quadratum à 5 N. id est, 40, procreatum: & æquantur 200 N, qui & ipsi sunt 1600. Cùm hoc modo demonstrauisset 25 q æquari 200 N: subijcit deinde,*

Deminutio seu depressio characterû.

Iã utrinq; Numeri charactere nomina denũciantur. *Sicut enim prius à similibus similia iusse-rat auferri, ita nunc alia uia utitur, uno numero iubens omnia deminui: id est, deduci q in N, & N in unitates nomi-*




*ne carentes: ut fiant de 25 q, iam 25 N: & de 200 N, 200. diuisoq; hoc numero per priorem, inuenitur 1 N esse 8. Is in 200 multiplicatus, 1600 quadratum, in 5 multiplicatus, 40 eius quadrati latus gignit. Demonstratur autem etiam 14 propositione sexti elementorum, æqualium, & angulo alterius æqualem angulum habentium parallelogrammorum latera esse reciproca, quæ angulos æquales conficiunt. Describantur duo parallelogrãma a b & b c, æqualibus ad b angulis, utrinsq; area 1600. & alterum sit, nempe a b, 200 N. alterum b c, 25 q. Latus d b est quincuplum ad b e, & uicissim b e quincuplum ad b f. & 1 N inuenitur 8.*

B 40 E
40 25 1600
G C

Canõ de Quadrato & latere in numeris.

*Aliter, ad illud,* Iam utrinque Numeri charactere. *Cùm inuenerimus 25 q æquari 200 N, ergo in unum q, competunt 8 N. At quadratum 8 Numeros continens esse potest nullum, nisi quod sit 8 unitatibus in se ductis confectũ: ut 1 N scilicet sit 8. Ergo cùm q sit 8 N, 1 N erit 8 unitates. In uniuersum enim, quot Numerorum erit Quadratum, tot unitatũ erit Numerus. Nam N seipsum ducens in suas quibus constat unitates, facit q. ut si N sit 2, q fiat 2 N: si N 3, q 3 N: & sic deinceps. Hæc expositio præstat priori.*

XYLANDRI.

*Non nemini etiam nimius fortasse uidebitur scholiastes heic fuisse, in re minimè obscura. sed inutilia non sunt, quæ tradit. Locus de parallelogrammis in Græco est lacer: ego totũ posui. Quod attinet ad istum ὑποβιβασμὸν, cùm q æquantur N, quod minoris nota utrinq; aufertur: Est in Algebrula nostra explicatum. Depreßionem hanc characterum nonnulli uocant. Id quoq; principium heic usurpatur, Numeri quadratum omnis, numeri ipsius esse multiplex. id enim uerum est in integris, & integris quibus fractio est adiecta. in solis minutijs contra semper quadratum minus esto latere. de quo alibi. Hæc autem exempla, & similia, ab artificibus ponuntur, ut eorum occasione præceptiones declarentur. Alioqui tales quæstiones nullam requirunt Algebram. semper enim minoris quadrato si diuidatur maior numerus, prodetur is qui quæritur: Et duo propositi numeri, si quidem in numeris non surdis & integris quæstio consistit, semper sunt quadratorum similes. Ita datis 72 & 2, ea lege ut tertius eos multiplicãs, quadratum & latus eius producat: quadratum minoris 4, ergo numerus qui quæritur, 18. producti 1296 & 36: hic latus illius quadrati. De fractis. Dentur 80 & 16, eadem lege. Quadratum minoris 256, si diuidat maiorem 80, fient $\frac{5}{16}$, is qui quæritur. ductus in utrunq;, conficit 25 & 5. Propositiones elementorum quæ citantur, Euclidea sunt.*

Canon.

XXX. Inueniantur duo numeri, quorum summa & ex multiplicatione unius in alterum productus tanti sint, quantos poscimur. Oportet autẽ numerorum inuentorum summæ quadratum, quadrato superare numerum qui ex ipsorum fit multiplicatione. Hoc autem est effictum aliunde. Esto summa numerorum 20, productum multiplicationis 96. Ponamus eorum interuallum 2 N. & cum summa ipsorũ sit 20, si huius semissem accepero 10, & differẽtiæ semissem 1 N, & adiecero & detraxero semissi summæ: rursum summa erit 20, partium interuallum 2 N. Ponatur ergo maior numerorum 10 † 1 N, erit minor 10 —— 1 N. manetq; & summa eadem, & idẽ interuallum. Restat ut uno in alterum multiplicato producatur 96. At producitur 100 —— 1 q. quod æquatur 96. & 1 N, fit 2. Ergo maior est 12, minor 8. & implent propositæ quæstionis leges.

SCHOLION.

*Est adiecta huic quæstioni conditio quædam, nec non & aliquot sequentibus. Eas Diophantus uocat (mea quidem opinione) aliunde efficias. quia huiusmodi conditiones non quosdam numeros habent obnoxios, quosdam secus: sed omnes in uniuersum numeri ijs deuinciuntur, neq; ulli sunt, in quos eæ non cõpetant. itaq; huius generis clausulæ non rectè conditiones aut limitationes appellantur. Nihil autem aliud conditio præsenti quæstioni adiecta dicit, quàm*

*cit, quàm quod habet quinta propositio libri Elementorum secundi. Est autem hæc.* Si recta linea in partes secetur æquales, itemq; inæquales: rectangulum ab inæqualibus totius portionibus compræhensum cum quadrato differentiæ portionum, æquale est semissis lineæ quadrato. *ſ Tamen quæstio limitatione quadam indiget, quam sic explicabimus. Necesse est ut quadratū semissis summæ maius sit productō partium unius in alteram. Vt hic. Summæ (20) semissis 10, eius quadratum 100, amplius quam 96. (neq; enim hoc loco defectum Quadrati unius consideramus.) Cæterùm 10 † 1 N in 10 —— 1 N, fiunt 100 —— 1 q iuxta Indicam methodum sic. Defectus 1 N in 10, facit defectum 10 N defectus 1 N in copiam 1 N, & 10 in 10, faciunt 100 —— 1 q. & 1 N in 10, facit 10 N. Ita conficiuntur 10 N † 100 —— 1 q —— 10 N. & cum defectus 10 N eorum præsentiam uicißim oblitteret, relinquuntur 100 —— 1 q. Quod si unitates æquarentur unitatibus ab altera parte, aut etiam eas excederent: non staret res. fierent enim 1 q & aliquot unitates, æquales nihilo. Iam quod fit à 10 † 1 N in 10 —— 1 N, ait fieri 100 —— 1 q: rectè. Cùm enim defectus in copiam ductus; defectum gignat, & N in N, procreet quadratum: rectè etiam heic defectus 1 N in eius præsentiam ductus, absentiā 1 Quadrati produxit. Deniq; cùm latus Quadrati inueniatur 2, erit 1 q 4. & 100 —— 1 q æquantur 96, additoq; defectu utrobiq; 100 æquantur 1 q † 96. & ab æqualibus si æqualia abijciantur, 1 q erit 4, & 1 N est 2.*

*Aliter.* Hoc autem est aliunde effictum.) *Id limitationis gratia dicit: nempe ne æquales sint quos quærimus numeri, sed inæquales. alioqui enim neq; demonstratio succedet, neq; conditioni stabitur. Neq; uero inæquales tantum esse oportebit, sed præter etiam seruanda est altera, quam exposuimus, conditio.*

XYLANDRI.

*Cardanus, Stifelius, alijq; ostenderunt hanc, quam heic tradit Diophantus, summæ in duas partes seu positiones diuidendi rationem, quarum altera tanto excedat semissem, quanto altera exceditur ab eo (ut heic 20 in 10, † 1 N & 10 —— 1 N.) sæpenumero conducere ad explicandas quæstiones, alioqui insolubiles. quod suo loco ostendimus quale sit. Certè heic ut absq; hoc compendio, sicut uidebis, explicari res posit: tamen incidet opus in connexam æquationem, ubi diuersæ duæ species uni comparantur. at Diophantea oppidò simplex manet. Quod autem ad πλασματικὸν illud seu (ut nos uertimus) aliunde effictum attinet: ideò sic appellari non dubito, quia etsi hanc conditionem non feras: tamen omnino & inuenti numeri inæquales erunt, & productum ipsorum quadrato numero superabitur à summæ semißis quadrato. Id demonstrat quinta secundi Euclidis, eruditè huc à scholiaste ad partes uocata. nam diuisio hæc summæ in duas partes, ad diuisionem rectæ lineæ est accommodata, atq; adeò inde efficta. ut & nos suo loco monuimus, & Campanus ad decimamsextam noni. Sed & inductione experiri libet. & subijciam tria exempla. Sint numeri 6 & 22. summa 28. productum 132. semißis summæ 14, quadratum 196, aufer 132, residuum 64 quadratus. Item numeri 14 & 21. summa 35. productum 294. Semißis summæ* $17\frac{1}{2}$, *quadratum* $306\frac{1}{4}$, *aufer 294, restat* $12\frac{1}{4}$, *qui habet radicem quadratam* $3\frac{1}{2}$. *Deniq; numeri* $2\frac{2}{3}$ & $7\frac{5}{6}$. *Summa* $10\frac{1}{2}$. *productum* $20\frac{8}{9}$. *Summæ dimidium* $5\frac{1}{4}$, *quadratum* $\frac{441}{16}$, *unde aufer productum, restat* $\frac{961}{144}$ *quadratus. Quod si numerorum in proposita quæstione statuisses alterum 1 N, alter erat 20 —— 1 N. cum summa sit 20. duc 1 N in 20 —— 1 N, habes 20 N —— 1 Z || 96. id est facta traiectione, quam suo loco docuimus, 1 Z || 20 N —— 96. fit 1 N 12 uel 8. quæ est sexta Christoferi Rodolphi regula. Quod idem aliter etiam euenisset. Nam altero posito 1 N, per hunc diuisus 96, alterum exhibebis* $\frac{96}{1}$ *N. quo addito ad priorē, summa* $\frac{1 Z + 96}{1 N}$ *æquabitur 20. id est facta reductione & traiectione, 1 Z || 20 N —— 96. ut antè. Enimuerò Canon à me ad quintā secundi traditus, huc etiā potest accommodari, & citra Algebram quæstioni satis fieri. Nam 8. √96. & 12. sunt continuè proportionales: & producti quod heic quæritur radix quadrata semper medio loco inter partes summæ stabit. Ergo summæ semissem semper in sese duc, à quadrato* Canon. *sic facto ipsum productū aufer; residui radix quadrata addita & detracta semißi summæ, partes ostendet. Dentur ergo duo numeri, quorum summa 76, productum 1120. Semißis summæ, 38, quadratum est 1444: unde si 1120 auferas, relinquitur 324. cuius radix quadrata 18 additur & adimitur dicto semißi, fiunt partes 56 & 20. Propositionem hanc scholiastes uigesimamseptimam facit, quia tria problemata fuerunt binis propositionibus tractata. sic sequentem, uocat uigesimamoctauam, quæ nobis est trigesimaprima. Ita ultimam huius libri trigesimamnonam appellat, cum sit 43. quia quadragesimasecunda tantùm porisma fuit superiorum. Quæ mendosa sunt, tuo Marte facilè corriges in Græco, nostræ ductu uersionis.*

XXXI. Dare duos numeros, quorū summa, & summa itē quadratorū ab ipsis qui fiunt, exprimat mādatos numeros. Oportet autem duplum summæ quadratorum utriusque, quadrato numero præstare & quadrato, quod est summæ ipsorum. Hoc

quoq; aliunde effictum eſt. Statuamus ſummam numerorum eſſe 20, quadratorum 208. Statuamus etiam, interuallum eorum 2 N eſſe. Erit ergo maior 1 N † 10. minor 10 — 1 N, alter ſummę ſemiſſe maior Numero, alter eodem minor: differentia ipſorum, 2 N, manente ſumma 20. Supereſt, ut etiam quadratorum ab ijs ortorũ ſumma ſit 208. atqui hæc inuenitur 2 Q † 200. id ergo æquatur 208. & fit 1 N, 2. Ad rem. maior ergo 12, minor 8. & ſoluitur quæſtio.

SCHOLION.

*Hæc quoq; conditio plaſmatica eſt, & uidetur abundare: niſi fortè id dicit, quòd indicatum eſt, numeros inæquales debere eſſe. Nos autem heic limitationem hancce proponimus. Duplum quadrati de ſemiſſe ſummæ oportet minus eſſe ſumma quadratorum. Nam & heic duplum quadrati à 10, qui eſt ſemiſsis ſummæ, ſcilicet 200, minus eſt ſumma quadratorum 208. nam ſi æquarentur heic, aut illud hoc maius fieret: res non conſtaret. Quod autem numerorum quadrata faciunt 200 † 2 Q. id ſic euenit. Quadratum de 10 † 1 N eſt 100 † 1 Q † 20 N. quadratũ de 10 — 1 N fit 100 † 1 Q — 20 N, ob canones alibi explicatos. Hæc ubi colligũtur, — 20 N & † 20 N ſe mutuò perimunt, & relinquitur ſumma quadratorum 200 † 2 Q. reliqua ſunt manifeſta.*

XYLANDRI.

*Ex eo typo, quem ad æquationem Algebricam expediendam adieci quinta prop. libri ſecundi Elementorum: facilè intelliges cur hanc quoq; conditionem plaſma uocarit Diophantus. nam Scholiaſtis limitatio eòdem recidit. Sed & inductione idem poßis deprehendere in alijs exemplis. Numeri 6 & 13. ſumma 19. quadratorum 36 & 169. ſumma 205. duplum 410. ſummæ quadratum 361 inde ablatum, relinquit 49 quadratum, &c. Vis compendij heic eadem eluceſcit. Quadratum autem illud, quo duplum ſummæ quadratorum partium præſtat quadrato ſummæ, ſemper eſt quadratum differentiæ numerorum. Ergo* CANON *ſic condetur.*

CANON. Duplica ſummam quadratorum à partibus profectorum, inde quadratum ſummæ quam numeri quæſtionis deben conficere, aufer: reſiduæ radix partium diſcrimen oſtendit: ergo eius ſemiſsis ſi addatur adimaturq; ſemiſsi ſummæ numerorum, ipſi ſe prodent. *Hæc omnia ſuam habent demonſtrationẽ in ys, quæ ad quintam ſecundi pertinent. Exemplum unicum proponemus. Quæremus duos numeros, quorum ſumma 19, quadratorum 205. Duplico 205, fiunt 410. ſummæ quadratum 361. inde detractum, relinquit 49. (omnino, & ſemper quadratum) eius radix 7. differentia partium. ſemiſsis ſummæ numerorum 9 ½. ſemiſsis differentiæ 3 ½: ad 9 ½. Ergo maior 13. Ergo minor 6, quia 3 ½ de 9 ½: aut 13 de 19 tantum relinquunt. Si lubet experiri per uulgatam uiam, ut ponas in autoris exemplo numeros 1 N & 20 — 1 N, per me licet. & heic ignoſcendum eſt diſcentibus. Sed certè Diophantæa ſubtilitas eſt laudibus uehenda.*

XXXII. Inueniendi ſunt duo numeri quorum ſumma, itemq; alterius quadrati ſupra quadratum alterius exceſſus eam, quam poſtulamus, quantitatẽ utrumq; habeat. Eſto ſumma numerorum 20, quadrati unius ſupra alterum exceſſus 80. Statuamus differentiam ipſorum 2 N, ut maior ſit 10 † 1 N, minor 10 — 1 N. ſumma 20, differentia 2 N. Supereſt ut quadratorum etiam ab ipſis ortorum interuallum ſit 80. eſt autem 40 N: atq; hi æquantur 80. fit rurſum maior 12, minor 8, & quæſtio ſoluitur.

SCHOLION.

*Hæc quæſtio nullam requirit limitationem. procedit enim in quibuſuis numeris, etiam ſi ſummã numerorum & interuallum quadratorum ponamus idem. Quod autem quadratorum interuallum in hac quæſtione ſit 40 N: id ſic habet. Quadratum alterum eſt 100 † 1 Q † 20 N: alterum 100 † 1 Q — 20 N. hæc ſi coniungenda eſſent, tolleret — 20 N alterorum 20 N præſentiam. Nunc cum tantùm exceſſus conſideretur, † 20 N ſupra — 20. N eſt amplius 20 N & ſeipſo: & coniunctis copia ac penuria, fit exceſſus 40 N.*

XYLANDRI.

*Si poneres ſummã numerorum 5, & tantundem quadratorum interuallum, numeri 2 & 3 propoſito quadrarent: immò quiuis duo unitate differentes, quod ex quadratorum natura oſtendi poteſt. nam quadratum de 16 (uerbi gratia) fit, ſi quadrato de 15 adijcias 31, id eſt 16 & 15, &c. Si uoles per Algebram experiri, pone alterum 1, alterum 1 N. Summa 2 N † 1. Quadrata 1 Z & 1 Z † 2 N † 1. aufer utrinq; 1 Z reſtant 2 N, † 1 æqualia 2 N, † 1, idem eidem. ergo quiuis numerus & proximè maior uno ſatiſfacient. In autoris exemplo diuiſio 20 in 10 † 1 N & 10 — 1 N nullo labore nos leuat aliquo. Ponamus partes eſſe 1 N & 20 — 1 N, erunt quadrata 1 Z & 1 Z † 400 — 40 N. ab hoc illud aufer, reſtãt 400 — 40 N || 80 hoc eſt 40 N ||*

*320. 1 N 8. huius quadratum 64. altera pars 12, quadratum 144, 80 amplius priore. Caterùm quadratorum interuallum cur sit 40 N, obscurius quidem, uerùm doctè interpres ostendit. Simplicissimū est è canone subtractionis id animaduertere. Nam de quadrato 100 † 1 q † 20 N, maiore, si minus detrahatur 100 † 1 q —— 20 N, unitatibus & Q se abolentibus, signū —— ad —— 20 N ostendit amplius fuisse subtractum quàm debuit, scilicet 20 N. adduntur ergò ad maioris 20 N, & interuallum perhibetur 40 N.*

XXXIII. Inueniantur duo numeri, quorum interuallum & qui fit altero, in alterū multiplicato, exhibeant eos qui præscribuntur numeros. Necesse est autē quadruplum producti multiplicatione eorum cum quadrato interualli iunctum, confice-re quadratum. Quod & ipsum effictum aliunde est. Sit interuallū 4, productus 96. Ponamus summam eorum 2 N, & cùm interuallum sit nobis dictum 4, erit maior 1 N † 2, minor 1 N —— 2: manente & summa eorum 2 N, & interuallo 4. Restat ut multiplicatio eorum producat 96. at gignit 1 q —— 4. hæc æquantur 96. fit rursus maior 12, minor 8, & implent postulata quæstionis.

SCHOLION.

*Ne hoc quidem limitatione opus habet. Quod autem 1 N † 2 in 1 N —— 2, 1 q —— 4 producit, sic habet. 1 N in 1 N, facit 1 q. in —— 2, —— 2 N gignit. rursus 2 in 1 N, 2 N producit, & in —— 2, —— 4. Et iam —— 2 N abolito præsentia 2 N, superest 1 q —— 4, &c.*

XYLANDRI.

*Certè limitationem hanc non modo experientia confirmat, sed palàm demonstratur octaua propositione secundi. Et quidem quadratus qui sic conficitur, semper est quadratū summæ ipsorum numerorum. Numeri 8 & 21. interuallum 13, productum 168. hoc quater, 672, adde 169 quadratum interualli, summa 841, radix 29, summa numerorum. Numeri 10 & 25, productū 250. id quater, 1000: adde 225, summa 1225, radix 35, summa numerorum.* Canon *quoq; hinc extruetur.* Datū productū *quadruplica, adde quadratum interualli, radix summæ quadrata, summam numerorum monstrabit. Ei si addas & adimas interuallum, semissis summæ & residui exhibebunt numeros. Ita heic 96 quadruplicato, 384, adde 16, quadratum interualli, summa 400. radix 20. ergo ½ de 24 & 16 numeri. Ponamus interuallum 12, productum 200. Huius quadruplum 800, adde 144, quadratum interualli, summa 944. Hic numerus est surdus: & in ueris ergo numeris non datur solutio huius quæstionis. Idē etiā Algebrica operatio monstrabit, ubi rursus Diophantea est breuior & subtilior quam uulgata. numeri 1 N † 6 & 1 N —— 6. fit 1 Z —— 36 æquale 200. hoc est 1 Z || 236. √236 ergo est 1 N. & numeri √236 † 6, ac √236 —— 6. quorum interuallum 12, productum (binomij in residuum) 200. summa √944. id est, bis √236. nam † 6 & —— 6 se abolent. Quod demonstrandum duxi: nescio qui prætcritum à scholiasta.*

XXXIV. Dentur duo numeri certa quadam ratione, ita ut eorum quadratorum summa ad numerorum summam eam teneat quæ poscitur rationem. Sit maior numerus minoris triplus. summa quadratorum ad ipsorum summam quincupla. Esto minor 1 N, maior ergo 3 N. summa 4 N. Summa quadratorum 10 q, quincuplum ad 4 N. ergo 20 N æquantur 10 q. fit 1 N, 2. & est minor 2, maior 6: ac postulatis quęstionis satisfaciunt.

SCHOLION.

Fit 1 N 2.) *id sic inuenitur. Cum 10 q æquentur 20 N: competunt in unumquemq; quadratū 2. Numeri. Non est autē alius quadratus qui 2 N possit, demto cuius latus est 2. sicut nullus qui 3 N ualeat, demto cuius latus 3. Quot enim Numerorum est Quadratus, tot unitatum est Numerus: ac uice uersa. atq; hoc pertinet ad deminutionem illam notarum siue characterū. Numeri iuncti 8, quadratorum summa 40, quod est quincuplum ad 8.*

XXXV. Dentur duo numeri ratione certa, ita ut summa quadratorum ab ijs creatorum, ad ipsorum numerorum interstitium certam habeat rationem. Statuamus maiorem minoris triplum esse: summam autem quadratorum ad interstitium numerorū decuplā. Sit minor 1 N, maior erit 3 N. Summa quadratorum decupla esse debet ad interuallum numerorum. Est autem illa 10 q, hoc 2 N, ergo illud huius

decuplum. Ergo 10 q æquantur 20 N. Vnitate utrinq; deminuto charactere, 10 N æquales 20. Ergo minor 2, maior 6. & fit, quod postulabatur.

SCHOLION.

*Numerus 6 ad 2 est triplus. quadratum à 6, est 36, & à 2 quadratum 4: summa 40. Interstitium inter 2 & 6, est 4. 40 autem huius decuplum.*

XXXVI. Inueniantur duo numeri datæ rationis, ut interuallum quadratorum quæ ab ijs fiunt ad summam numerorum certam habeat rationem. Esto maior minoris triplus: interuallum quadratorum ab ipsis ortorum sescuplum summæ numerorum. Statuatur minor 1 N. erit maior 3 N. restat ut etiam quadratorum interuallũ sescuplum sit summæ numerorum. Quadratorum interuallum est 8 Q, numerorũ summa 4 N. Ergo 8 Q sescuplum sunt ad 4 N. itaq; 24 N. æquales 8 Q. Fit 1 N 3, & soluitur quæstio.

SCHOLION.

*Triplus est 9 ad 3. quadratus illius 81, huius 9: interstitium 72. eius sextans est 12, summa numerorum 3 & 9.*

XXXVII. Inueniantur duo numeri in data ratione, ut etiam quadratorum quæ ab ijs fiunt interuallum ad interuallum ipsorum numerorum rationem habeat quæ petitur. Esto maior minoris triplus, quadratorum interuallum ad numerorum interuallum duodecuplæ rationis. Statuamus minorem 1 N, erit maior 3 N. Superest, ut etiam quadratorum interuallum ad numerorum interuallum sit duodecuplum. Atqui hoc est 2 N, illud 8 q. itaq; hoc illius est duodecuplũ: & proinde 24 N æquantur 8 q. Fitq; rursum 1 N 3. & aperta est demonstratio. Similiter hac ipsa ratione inuenientur duo numeri rationis propositæ, ut ex multiplicatione eorum productus ad summam eorum rationem habeat præscriptam. Et rursum duo numeri certæ rationis, ut ex multiplicatione eorum productus ad ipsorum interuallum rationem eam habeat, quæ mandatur.

SCHOLION.

*Numeri 3 triplus est 9, & eum superat numero 6. Quadratum maioris 81, quadrato minoris 9, præstat numero 72. qui ad 6 est duodecuplus.* Porisma *autem illud, seu additamentum, sic habet. Sit maior minoris triplus: productum multiplicationis ad summam numerorum dupla sesquiquarta. Sit minor 1 N, erit maior 3 N. producunt autem alterum in alterum multiplicatus 3 Q. hoc debet esse* $2\frac{1}{4}$ *summæ ipsorum quæ est 4 N. ergo 9 N (bis 4 N, & quadrans è 4 N) æquantur 3 Q. ergo 1 Q est 3 N; & 1 N est 3. Erit ergo maior 9, minor 3. productum 27. summa 12, cuius duplum & quadrans est 27. Sit rursum maior ad minorem triplus, & productus ex ipsis quater contineat ipsorum interuallum, eiusq; semissem. Erunt rursum numeri 3 & 9. Arbitror autem Diophantum propterea isthæc non exposuisse: quia in multiplicibus numeris hæc demonstrari non possunt, ut priora: sed duntaxat in multiplicibus superparticularibus.*

XYLANDRI.

*Breuitatis potius causa, quàm fuga minutiarũ puto Diophantũ istis indicatis potiùs quàm prolixè explicatis acquieuisse. Ne rudis quicquã iure desideret: duo proponam problemata. Dentur duo in quincupla ratione numeri, quorum productum ad summam sit duplum. Ii ergo sunt* $2\frac{2}{5}$ *& 12. Item sit numerorum ratio* $3\frac{2}{3}$*. producti ad interuallum* $2\frac{1}{2}$*. Erunt numeri* $\frac{20}{11}$ *&* $\frac{20}{3}$*. interuallum* $\frac{160}{33}$*, per* $2\frac{1}{2}$ *multiplicatum* $\frac{400}{33}$ *tantũ fit etiã* $\frac{20}{11}$ *in* $\frac{20}{3}$ *multiplicatis. Adderem formas operationum, si ignauis scriberem. In Græco autoris fœdum erat mendum inculcatum ἀπ' αὐτῶν pro ὑπ' αὐτῶν. cum hoc productũ numeri in alterũ, illud quadratum utriusq; notet. Sed res, & scholij integritas nos facilè expediuerunt.* ὑπ' αὐτῶν, ἀπ' αὐτῶν.

XXXIIX. Inueniantur duo numeri datæ rationis, ita ut minoris quadratus ad maiorem habeat quæ requiritur rationem. Statuamus maiorem minoris triplum: quadratum minoris ad maiorem numerum esse rationis sescuplæ. Esto minor iterũ 1 N, utiq; maior erit 3 N. Quadratum minoris 1 Q debet sescuplum esse ad numerũ maiorem. Ergo 1 Q sescuplum est ad 3 N. proinde 18 N æquantur 1 Q. & 1 N est 18: minor scilicet: ac maior 54. qui satisfaciunt proposito.

SCHOLION.

Proinde 18 N.) *id est minus sumtum sexies, æquabitur maiori. nam sexies 3 N fiunt 18 N. & Q de 1 N. est 1 Q, æqualis nimirum 18 N. omnium nomina unitate deprimantur, erunt 18 æquales 1 N. ergo minor,*

*nor, 1 N, est 18: & maior, 3 N, est 54. & est 324, quadratus minoris, sescuplus ad 54, puta maiorem.*

XXXIX. Da duos numeros rationis quæ imperatur, ut minoris quadratum ad ipsum minorem habeat eam quæ posciturrationem. Esto maior minoris triplus: & quadratus minoris ad minorem, sescuplus. Erit rursum maior 3 N, minor 1 N, manente quæ imperatur ratione. restat ut minoris quadratum, 1 Q, sit sescuplum minoris, qui est 1 N. ergo 6 N æquantur 1 Q. est minor 6, maior 18. & satisfit proposito.

SCHOLION.

*Maior 18. minor 6: ratio tripla. quadratus minoris ad ipsum minorem, sescuplus: 36 ad 6.*

XYLANDRI.

*Canones fabricari heic est faciliùs, quàm ut me monitorem res poscat. plura etiam exempla quiuis suo Marte facilimè finget. quæ etiam de sequentibus uolo accipi propositionibus.*

XL. Postulantur duo numeri certam habentes rationem, ut minoris quadratus ad summam numerorum, datam rationem habeat. Esto maior minoris triplus: & quadratus minoris ad summam numerorum duplus. Erunt denuò maior 3 N, minor 1 N. Minoris quadratus, 1 Q, duplus debet esse summæ, quæ est 4 N. proinde 8 N æquantur 1 Q. & 1 N est 8. minor scilicet: ergo maior 24. Ii soluunt quæstionem.

SCHOLION.

*Maior 24. minor 8. ratio tripla. 64 est quadratus minoris, duplus summæ numerorum 32.*

XLI. Inuenire duos numeros certæ rationis, quorum minoris quadratus ad numerorum interuallum sit in data ratione. Maior sit minoris triplus: quadratus minoris ad numerorum interuallum rationem obtineat sescuplā. Erit maior 3 N, minor 1 N. restat ut 1 Q, minoris quadratus, ad interuallum numerorū, quod est 2 N, sit sescuplus. ergo 1 Q. sescuplus ad 2 N, æquabitur 12 N. & 1 N est 12, minor: maior 36. & satisfit proposito.

SCHOLION.

*Numeri 36 & 12, triplus maior minoris. ipsorum interuallum 24. & 144, quadratus minoris, ad hoc sescuplus.*

XLII. Iisdē rationibus inuenientur duo numeri datæ rationis, ita ut maioris quadratus ad minorem numerum ea sit, quæ petitur, ratione, rursumq; duo numeri datæ rationis, ut quadratus maioris ad ipsum maiorem sit ea quam lubet ratione. itē duo numeri datæ rationis, ut maioris quadratus ad summam numerorum rationē obtineat datam. deniq; duo numeri datæ rationis, ut maioris quadratus ad numerorum interuallum datam habeat rationem.

SCHOLION.

*Porismatis seu appendicis huius partes ita habent. Maior 6, minor 2: ratio tripla. quadratus maioris 36 ad minorem octodecuplus. Rursum maior 6, minor 2: ratio tripla. 36. quadratus maioris ad ipsum 6 sescuplus. Item maior 12, minor 4: ratio tripla. Maioris quadratus 144, summæ numerorum, quæ est 16, nouencuplus. Deniq; maior 6, minor 2, ratio tripla. quadratus maioris 36, ad 4 interuallum numerorum nouencuplus.*

XLIII. Datis duobus numeris, tertius est inueniendus, ut de his porrò tribus binis in unum conflatis, & in reliquum multiplicatis, tres producantur numeri, æqualibus se incrementis superantes. Duo numeri sunto 3 & 5; & quæratur tertius, ut deinde bini loco unius in reliquum multiplicati, producant numeros quorum æqualia sint interualla. Qui quæritur, esto 1 N. Is adiunctus ad 5, fit 1 N † 5. sic deinde multiplicatus in reliquum, qui est 3, facit 3 N † 15. Rursus 1 N & 3, sunt 1 N † 3. quod in reliquum, puta 5, multiplicatum, facit 5 N † 15. Deniq; si coniungantur 3 & 5, conficitur 8. hic in 1 N ductus, facit 8 N. Enimuerò 3 N † 15 non esse trium productorum maximum, liquet. omnino enim eum superat hic, 5 N † 15. Ergo 3 N † 15 aut minimus est productorum, aut medius. ac 5 N † 15 aut maximus est productorum, aut medius. Maximus, medius, aut minimus esse potest 8 N: quia nondum constat quot unitates conficiant 1 N. Ponamus primò maximum esse 5 N † 15; minimum 3 N † 15. mediū 8 N. Iam si tres numeri sese æqualibus superent interuallis, duplum medij faciunt

coniuncti maximus & minimus. Hic uerò summa extremorum est 8 N † 30. medius 8 N. ergo 8 N † 30 æquantur 16 N. & fit 1 N, $\frac{15}{4}$ unitatis; seu 3 & dodrans. Tantus est qui quæritur, & satisfacit postulatis propositi. Iam uerò statuamus maximum esse 5 N † 15, medium 3 N † 15, minimum 8 N. Atqui si tres numeri æqualibus se interuallis subsequantur: quanto superat maximus medium, tãto & medius minimum. Sed heic maximi supra medium excessus est 2 N: medij supra minimum 15 —— 5 N. hæc ergo sunt æqualia. & 1 N erit $\frac{15}{7}$, seu $2\frac{1}{7}$ tantus est quæsitus, & quæstioni satisfacit. Deniq; maximum statuamus 8 N, medium 5 N † 15, minimum 3 N † 15. Rursus cum extremorum summa sit duplum medij; 11 N † 15 æquabunt 10 N † 30. & 1 N est 15. Ergo 15 est numerus qui quæritur, & implet postulata.

## SCHOLION.

Variæ solutiones, inuẽta æquatione.

*Tripliciter hoc demonstrat propter 8 N; quia cùm nondum liqueat quantus sit Numerus; 8 Numeri maximus, minimus, aut medius quæsitorum esse potest: ideò diuersum ei in singulis locum adsignat demonstrationibus, mediũ in prima, minimum in secunda, maximum in tertia faciens. Ita autem inuenitur eius quantitas. Cum 8 N & 30 æquentur 16 N: si de similibus abijciantur similia, relinquuntur 8 N & 30 æqualia. Partire 30 per 8, inuenies $3\frac{6}{8}$, aut, si etiam 3 in quadrantes solues, ut omnia sub eandem reducantur speciem, fient $\frac{15}{4}$. & abiecta denominatione partium, 15 integra. Cùm ergo maximus sit 5 N † 15, hoc est $33\frac{3}{4}$: hæc in quadrantes resoluta, fiunt 135. Medius, 8 N, id est 30, resolutus in quadrantes, fit 120. eademq; ratione minimus 105. horum est idem interuallũ, scilicet 15. In secunda demonstratione fit 1 N ualor $\frac{15}{7}$: hac de causa. Cùm 15 —— 5 N æquentur 2 N: adiecto utrinq; defectu, erunt 15 æquales 7 N. & partitio ostendet 1 N esse $2\frac{1}{7}$. Hoc totum, etiam 2 in septimas resolutis, & nomine fractionis abiecto, fit 15. Maximus ergo erit $25\frac{5}{7}$, uel omnibus in septimas partes resolutis 180 septimarum. Medius $21\frac{3}{7}$, hoc est 150 septimarum. Minimus $17\frac{1}{7}$, hoc est 120 septimarum. In tertia 1 N est 15. Nam cùm 15 N † 15 æquẽtur 30 N. undiq; abiectis æqualibus, 1 N fit 15. reliqua manifesta sunt.*

## XYLANDRI.

*Nam maximus fit 120, medius, 90, minimus sex. De causa fracta in integros uertendi suprà monuimus. Cæterùm hæc quæstio tripliciter soluitur, ut multa alia. cuius rei causa est, quod non exprimitur tertius ille, quem quærere iuberis, maior ne, an minor datis extremis, an uerò medio loco ijs interuenire debeat, itemq́ producta eorũ. In textu quæ margini erant allita, in contextum retuli, De arithmetica progreßionis proprietate. cui hic innititur autor, nihil attinet monere hoc loco.*

# DIOPHANTI RERVM ARITHMETICARVM LIBER SECVNDVS.

*Guilielmo Xylandro interprete.*

DEntur duo numeri, quorum summa ad summam quadratorum ab ijs procreatorum habeat eam quæ poscitur rationem. Sit quadratorum summa ad numerorum summam decupla. Statuatur minor 1 N maior 2 N. summa 3 N. quadratorũ summa 5 Q. horum decima pars sunt 3 N. ergo 30 N æquantur 5 Q. erit 1 N, 6. minor quæsitorum. maior 12. hiq; postulatis satisfaciunt. Propositio I.

II. Inueniendi sunt duo numeri, quorum interuallum ad quadratorũ interuallũ ab ipsis ortorum sit in ea quæ præcipitur ratione. Sit numerorũ interuallũ sextans interualli quadratorum. Ponemus minorem 1 N, maiorem 2 N. interuallum numerorum 1 N, quadratorum 3 Q. ergo 1 N sextans est de 3 Q. itaq; 6 N æquantur 3 Q. & 1 N fit 2. ergo minor est 2, maior 4. & faciunt id quod iubemur.

III. Dentur duo numeri, ut ex multiplicatiõe alterutrius in alterũ productus ad summam uel interuallum numerorum habeat rationem præscriptam. Esto productus summæ sescuplus. Ponamus eos qui quæruntur 1 N & 2 N. (Cæterùm possunt etiam in quauis data proportione poni) erit productus 2 Q, summa numerorum 3 N. Ergo 2 Q sescuplum sunt ad 3 N. itaq; 18 N æquantur 2 Q. deprimantur notæ unitate, 18 æquabuntur 2 N. ergo 1 N 9. duo ergo quæsiti numeri, & satisfacientes postulatis, 9 & 18. Quod si productũ interualli sescuplum esse præscribatur, erat rursum productus 2 Q, interuallum 1 N. & 6 N æquales 2 Q. & 1 N 3. Ergo 3 & 6 numeri sunt qui quærebantur.

IV. Postulantur duo numeri, quorũ interualli ad summam ab ipsis ortorũ quadratorum sit quæ præscribitur ratio. Esto summa quadratorum ad interuallum numerorum decupla. Statuamus alterum 1 N, alterum 2 N. summa quadratorũ 5 Q, interuallũ 1 N. Oportet 5 Q decuplum esse ad 1 N. ergo 10 N æquantur 5 Q. est 1 N, 2. & quæsiti sunt 2 ac 4.

V. Petuntur duo numeri ea conditione, ut quadratorũ ex ipsis natorũ interuallum ad summam numerorum ea sit, quæ præscribitur, ratione. Sit interuallum quadratorũ ad summam numerorũ sescuplũ. Rursum quæsiti ponantur 1 N & 2 N. quadratorum interuallum 3 Q, summa numerorum 3 N. Oportebit 3 Q esse sescuplum ad 3 N. ergo 18 N æquantur 3 Q. fit 1 N, 6. alter 12. Euidensq; est demonstratio.

### SCHOLION.

*Quinq; hæ quæstiones uidentur eædem esse cum quinq; priore libro expositis. prima scilicet eadem cum trigesimaprima primi: secunda cũ eiusdem xxxiv, tertia cum xxvij, & xxx, (est enim duplex) quarta cum xxxij, quinta cũ xxxiij. Sunt aũt hæ illis imperfectiores non in illis idem, quod heic, quærebatur: & præterea etiam ratio numerorum qui quærebantur: quod heic nequaquã fit. & ex illis hæ sunt notæ. Ponit in his omnib. 1 N & 2 N: idq; nihil interest, quacunq; ratione numeri, modò inæquales, constituantur. Semper enim satisfit quæstioni.*

### XYLANDRI.

*Latiùs ergo patent hæ quæstiones, & quauis innumeras admittit solutiones: quod in tertia quæstione autor non dissimulauit. & depressio characterũ eis accidit, quod & ipsum ibi indicauit. Exẽplis facilius est hæc illustrare, quàm ut nostra requiratur heic opera. Semel admonitus, semper intelligas uelim, me mẽda Græci textus oĩa nõ sustulisse: sed id tibi ex uersiõe nostra faciẽdũ mãdasse.*

VI. Quæruntur duo numeri, dato eorum interuallo, quorũ quadrati quod habẽt interuallũ, superet numerorũ interuallũ quãto postulatur numero. Oportet aũt interualli numerorũ quadratũ minorẽ esse summa quæ colligitur ex ipso hoc interuallo, & numero postulato. Esto numerorũ interuallũ 2, & numerus quo quadratorũ interuallũ interuallo numerorũ præstat, 20. Sit minor 1 N, maior erit 1 N † 2, manẽte interuallo 2. Quadratorũ interuallũ 4 N † 4. atq; hoc 20 est ultra interuallũ 2. ergo æqualia 4 N † 4 & 22. & fit 1 N, 4 $\frac{1}{2}$ minor quæsitorũ: maior 6 $\frac{1}{2}$. & satisfaciunt q̃stioni.

VII. Habẽdi sunt duo numeri, ea lege, ut interuallũ quadratorũ ab ijs procreatorũ, præstet interuallo numerorũ numero eo quod rationẽ interuallorũ explicat, & insup dato numero. Ponamus interuallorũ rationẽ esse triplã, ac prętetea habere 10. Heic o-

 portet

portet quadratũ interualli numerorũ, minorẽ esse summa quæ ex triplo huius interualli, & ex unitatibus decem colligitur, quæ dantur. Detur autem numerorum ipsorum interuallum 2. Erit itaq; minor 1 N, maior 1 N † 2. Ergo 4 N † 4 (quadratorũ interuallũ) triplũ erit ad 2, & habebit prætetea 10. Ergo ter 2, & 10, hoc est 16, æquantur 4 N † 4. fit 1 N, 3. hic est minor, maior 5. & faciunt, quæ postulabantur.

S C H O L I O N.

*Determinationes sextæ & septimæ quæstionis rectè habent. In sexta interualli 2 quadratus (4) minor debet esse summa quæ colligitur ex hoc interuallo & postulato numero 20. summa 22. quibus minor est 4. In septima quadratus interualli numerorum (4) minor debet esse coniunctis triplo interualli (6) & dato numero 10. summa 16. Si æqualis ponatur quadratus ille summæ dictæ utrauis in quæstione: non stabit res: ut sæpe iam diximus. multo minus, si maior.*

X Y L A N D R I.

*Aliud exemplum sextæ. Dentur duo numeri, alter alteri numero 4 præstans, ita ut quadratorum interuallum numerorum iam dictum interuallum superet 68. Numeri erunt 1 N & 1 N † 4. quadrati 1 Q & 1 Q † 8 N † 16. ergo horũ interuallum 8 N † 16. Hinc si numerorum interuallum, scilicet 4, auferatur, supererũt 8 N † 12, quod æquale est 68. & utrinq; reiectis 12, 8 N || 56. ergo 1 N, minor, 7. maior 11. Quod ad conditionem seu limitationem attinet, 2 (interuallum numerorum) & 68 numerus postulatus, summam conficiunt 70. at interualli dicti quadratus 16. multo est minor quam 70. Vt autem necessitatem conditionis intelligas, Quære duos numeros, 5 differentes: ut quadratorum interuallum sit 25, hoc est 20 amplius quam 5. Inuenies 25 † 10 N || 25. quod est absurdum. Pone numerorum interuallum 10, & quadratorum interuallum hoc amplius 30. inuenies 100 † 20 N || 40. quod est fermè absurdius. Idem de septima quæstione tuo Marte experiaris licet. Græca & Diophanti & scholiastæ sunt ualdè confusa.*

IIX. Quadratus numerus propositus, diuidatur in numeros duos quadratos. isque sit 16. Ponatur prior numerus 1 Q: ergo alter erit 16 —— 1 Q. & hunc oportebit numerum æquari uni quadrato. Fingo quadratum latus habentem Numeros quotquot uolo, deficientibus tot unitatibus, quot constat latus quadrati 16. ac sit latus quadrati 2 N —— 4, (nam latus 16, est 4.) quadratus erit 4 Q —— 16 N † 16. hoc æquabitur 16 —— 1 Q. Adijciatur utrobique defectus, & ab æqualibus æqualia auferantur, 5 Q æquabuntur 16 N. & 1 N erit $\frac{16}{5}$. Ita fiet quadratus $\frac{256}{25}$ unus. ergo alter $\frac{144}{25}$. qui coniuncti faciunt $\frac{400}{25}$. hoc est 16. cuius partes utraque est quadratus numerus.

S C H O L I O N.

*Iubet hac propositione quadratum numerum 16 diuidere in duos quadratos: cùm quidem id natura eius nõ ferat. Quidam enim quadrati diuiduntur in quadratos. alij neutiquam. Et qui diuiduntur, alij in duos, ut 25 in 16 & 9: alij in tres, ut 49 in 4, 9, 36: alij in quatuor, ut 225 in 4, 9, 16, 196. ac sic deinceps in infinitũ. Non ergo hoc dicit, 16 in duos quadratos esse partiendum, manẽte sectionis experte unitate: id enim est impossibile. & si hoc egisset, poterat quadrato 25 adscito, inq; duos quadratos diuiso, quæstionem demonstrare. Nunc autem sua fretus alacritate quemuis quadratum diuidere intendit in duos quadratos: quod, nisi in partes secta unitate, fieri nequit. Ita hic partitus est quadratum numerum 16 in duos quadratos, quorum alter 10 $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{25}$, latus habet 3 $\frac{1}{5}$, alter 5 $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{25}$, latus habet 2 $\frac{2}{5}$. qui quadrati coniuncti, 16 conficiunt. Et prior horum quia $\frac{1}{25}$ in eo exsistit, totus in uigesimas quintas resolutus, fit $\frac{256}{25}$: & latus eius in quintantes resolutum, fit $\frac{16}{5}$. Posterior eadem de causa fit $\frac{144}{25}$.*

Quadrati minutiarũ quales.

*latus eius $\frac{12}{5}$. Hoc enim uniuersè sciendum est, quod quadrati qui à partibus unitatis fiunt, partibus constant cognominibus partium, à quibus fiunt, quadratorum. Sicut in proposita quæstione. cum latus sit $\frac{16}{5}$, & à 5, quod est nomen partium, fiat quadratus 25; conuenienter etiam quadratus lateris est $\frac{256}{25}$. & si latus fuisset triens, nonarum partium exstitisset: si quadrans, sedecimarum: ac sic deinceps. Atq; hoc est illud. Numeri aliquota pars in numeri eiusdem eandem aliquotam partem multiplicata, aliquotam quadrati de eo numero gignit partem. est enim $\frac{1}{5}$ aliquota numeri, $\frac{1}{25}$ aliquota quadrati pars. Mirari autem nihil attinet, quòd quamuis quadratis cõiunctis rursus 16 conficiuntur: tamen latera quadratorum coniuncta maiorem constant numerum quàm sit 4, puta latus numeri 16. summa enim laterũ est 5 $\frac{3}{5}$. Omniũ enim quadratorũ in duos quadratos diuisorũ latera ex diuisione ortorũ quadratorũ cõiuncta plus cõficiunt quã sit latus diuisi: quãtumuis quadrati iũcti diuisum quadratũ restituant. Ita latus quadrati 25 est 5: quadrati ipsum cõficiẽtes 16 & 9: latera 4 & 3, quorũ summa 7, amplius aliquid q̃ 5. Enimuerò Diophãtus omnia sub unã reducere speciẽ intẽdẽs, nõ ab unitatib. & partib. quadratos facit. Sed cũ fieri nequeat ut pars ipsa per se in unitatẽ cõuertatur, unitas aũt in partes secari possit: numerorũ unitates secat in partes cognomines*

Quadratorũ, in quos quadratus diuisus est, laterũ summa maior quadrati latere.

partium

partium in ijs inuentarum. cumque $\frac{1}{25}$ & $\frac{1}{5}$ sese exseruerint in numeris: tota diuidu iuxta rationem numeri q primus ab unitate partes eas habet, estque 25 atque sic quadratorum uigesimæquintæ fiunt alterius 256, alterius 144, quorum summa 400. quem numerum etiam 16 facit in uigesimasquintas sectus: cum uicies quinquies sedecim fiant 400. Cùm ergo iubet quadratum 16 diuidere in duos quadratos: nihil aliud est, ac si diceret, 400 (quadratum numeri 20 factum 16 in 25 quadratum ductis) diuide in duos quadratos: & diuideret in 256 & 144. Vel sic. Detur numerus, in quem ductus 16, quadratum procreet, qui in duos quadratos secari poßit, unitate heic nullam admittente diuisionem, atque is inuenitur 25: in quem multiplicatus 16, gignit 400, quadratum numeri 20: qui 400 diuiditur in 256 quadratum lateris 16, & in 144, quadratum lateris 12. Rectè etiam hoc dixit. Fingo quadratum latus habentem, &c. Nam si positis iisdem, fingamus quadratum fieri à 4N —— 4. fient 17 Q æquales 32 N, & 1 N, erit 1 $\frac{15}{17}$. uel $\frac{32}{17}$. Erit ergo prior quadratus, cuius latus 1 $\frac{15}{17}$ fit, 2 $\frac{13}{17}$ & $\frac{225}{289}$. Nam 17 in se ductus 289 facit, & 1 $\frac{15}{17}$ in se ductus, gignit $\frac{1024}{289}$. Alter quadratus sic inuenietur. cum ponatur 4 N —— 4 latus eius, & 1 N fit 1 $\frac{15}{17}$. 4 N facient 7 $\frac{9}{17}$. unde si 4 auferas, relinquetur latus $\frac{60}{17}$ seu 3 $\frac{9}{17}$. huius quadratum ergo $\frac{3600}{289}$, si $\frac{60}{17}$ in se ducas. uel 12 $\frac{3}{17}$. $\frac{81}{289}$. si 3 $\frac{9}{17}$ in se multiplices. Hi compositi quadrati, puta 2 $\frac{13}{17}$. $\frac{225}{289}$. & 12 $\frac{1}{17}$. $\frac{81}{289}$, conficiunt 16 propositum quadratum. Partium porrò quadrati 1024 & 3600 constituunt summam $\frac{4624}{289}$. cuius latus, utpote quadrati, est $\frac{68}{17}$. Fit autem 4624 si 16 multiplices per 289, aut numeri 16 unam quamlibet unitatem in 289 partes seces. Est ergo iam 16 diuisus in alios duos quadratos numeros. Hoc autem scire oportet, quod heic loci nunquam debet quadratus effingi ex aliquo uno Numero, sed ex Numero & parte quotacunque, aut duobus, ac deinceps. Nam si ab uno numero quadratus creetur, non succedet res. rursus enim fiet numerus tantus, quantum & latus est propositi quadrati. atque ita prior quadratus idem erit cum eo qui ad diuidendum est propositus, & secundus nusquam exister: itaque manebit quadratus noster indiuisus: quod minimè uolebamus. Praeterea quod dicit de quadrato conficiendo è latere, quod sit quotcunque tandem numerorum, demtis tot unitatibus quot habet latus numeri 16. Statutum sit 25 quadratum diuidere in duos quadratos. Is cum è 16 & 9 conficiatur: ubi ab 25 abstulero 1 Q (puta 16.) relinquuntur 9: nimirum 25 —— 1 Q. Porrò 3, latus quadrati 9, id erit, quod fit fingere 2 N —— tot unitatibus, quot constat latus quadrati ad diuidendum propositi, latus huius 5. ergo latus quod fingitur, 2N —— 5. Quadratum ergo sic conficietur. Cum numerus, qui 16 quadrati latus est, sit 4: utique duo numeri erunt 8. ab his si auferas latus quadrati 25, quod est 5; omnino relinquuntur 3, quod est latus quadrati 9. & 3 est 8 — 5. Rursum si auferam à 25 numerum quadratum, 9: restat 16. Huius latus non iam amplius dicemus fingi 2 N —— tot unitatibus, quot latere quadrati 25 continentur. Nam cum impar sit 3, unde 9 nascitur: ergo tres numeri, erunt 9. unde si latus quadrati 25, scilicet 5, subduxeris: superest 4, latus de 16. & est latus 16, nimirum 4, 3 N —— 5. id est, 9 —— 5. Vniuersè enim in omnib. quadratis, qui in duos quadratos diuiduntur: latus diuisi, cum latere alterutrius in quos facta est diuisio, rationem quandam habet ad alterius latus, & subtracto alterutro quadratorum qui è diuisione emergunt: latus reliqui tot erit unitatum, quot erat demto diuisi latere latus totiplex, quotuplex erat ratio: & reliqui latus cum latere diuisi ad latus ablati. Verbi gratia. E 16 & 9 constat 25, quadratus è quadratis, inque hos diuiditur. & latus totius, puta 5, cum 3, ut latere quadrati 9; duplum sit lateri totius 16, quod est 4. Et si auferam 16 à 25, erit latus de 9. ob duplam rationem bis latus de 16, minus latere de 25. Erit ergo 8 —— 5: quippe 3. Rursus cùm latus de 25, uidelicet 5, cum 4 ut latere de 16 triplum sint 3, qui est latus 9: si auferam 9, erit latus de 16 ob triplam rationem, ter latus de 9, —— latere de 25: scilicet erit 9 — 5, id est 4. Similiter cùm quadratus 169 diuidatur in 144 & 25 quadratos: & 13 latus de 169, cum 5 latere de 25, sesquiplum sit ad 12, quod est latus quadrati 144. Ergo si 144 de 169 subtraham: erit latus de 25, puta 5, ob sesquiplam rationem, sesquiplum lateris de 144, quod est 12, uidelicet 18 — latere 169, quod est 13. erit ergo quinque. Et rursus, quandoquidem 13, latus de 169, cum 12 latere de 144, quincuplum est lateris de 25, quod est 5: si auferam 25 de 169: propter quincuplam rationem 12, ut latus de 144, erit quincuplum lateris de 25, — latere de 169, quod est 13. erit ergo 25 —— 13. id est, 12. Proinde cum quæuis laterum inuicem detur ratio, semper tamen cum defectu lateris quod habet quadratus, diuidendus: ideo dixit, Numeros quotquot uolo, deficientibus, &c. Ergo in exemplo de 169, sicut diximus, sublato 25, relinquitur 144 quadrati latus, quinquies tantum quantum latus 25: demto scilicet ab illo 13, qui est latus 169. Ac Diophantus quidem dixisset, Esto latus de 144, 5N — latere de 169. nam 1 N est latus quadrati ablati, cui quadrato adsignaueramus 1 Q. Quod si dixisset diuidendum esse 169, & ab eo auferendum 1 Q: ac deinde dixisset: Esto reliqui latus, Numeri 6, 7, aut quotcunque tandem, —— latere de 169: non iam partes fuissent 144 & 25, sed aliæ. sicut suprà demonstrauimus. Quomodo autem dicit Diophantus, secundum quadratum fore 144? quia latus eius posuit 2 N —— 4: ergo 2 N erunt 6$\frac{2}{5}$: unde ablatis 4, restant 2$\frac{2}{5}$. & unitatibus in quintantes dissolutis, erunt hæc 12, quod est latus 144.

Cautio de latere fingendi quadrati.



XYLANDRI.

*Praeclarum est hoc problema, & raræ subtilitatis. Sed in Græco Diophanti contextu fœdum est men-*

## SCHOLION.

*Trientem sui primus amittens 1 N, ac deinde recipiens 3 —— 1 N fit 1 N † 3, hoc pacto. Cùm amisit 1 N, habet adhuc 2 N. quibus si accedant 3 —— 1 N, erit 1 N † 3. nam —— 1 N abolet unum N de duob. N. nam defectus copiam accedens, facit defectum.*

## XYLANDRI.

*Scholion hoc nõ est integrũ: nõ magno cũ dispẽdio sciẽtiæ. In Diophanto aũt ipso est mẽdum, quod totã rẽ obscurat. ubi enim legitur μονάδων γʹ. μονάδες, &c. legendũ est μονάδων, ἴσαι ἀριθμῷ ά. καὶ μονάδων γʹ. μονάδες ἄρα τρεῖς, &c. In hoc & similib. exemplis semper memineris additioni anteire deminutionẽ. secus enim sicubi facias, nõ succedet negociũ. Sic enim res habet.*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 —— 2 | est | 4. | adde | 1 | erit | 5 |
| B | 4 —— 1 | | 3. | | 2 | | 5 |
| C | 5 —— 1 | | 4. | | 1 | | 5. |

*Quod scholiastes voluit interpretari, tale est. Ponit Diophãtus A esse 3 N. B. 4. Iã B amisso sui quadrante, unitate puta, fit 3. & addito triente primi, qui est 1 N, colligitur 3 † 1 N. Ergo tantundẽ fiet, si 1 N, ut trientẽ sui, adimas primo, & quintantem tertij residuo addas. 3 N detracto 1 N, sunt 2 N. hoc de 3 N † 1 sublatũ, scilicet ostẽdet tertij quintãtem 3 —— 1 N, qui ad 2 N additus, 3 N † 1 fecerat: notum est enim quæ sit inter additionem & subtractionem reciprocatio. cætera sunt plana. Porrò uel ex secundi positione facile intelligẽs, arbitrio tuo posse te quotuis solutiones talium problematũ fabricari, uel in integris uel in fractis numeris. Nihil enim impedit, quin primum ponas 1 N, aut 12 N, aut quotuis. Et secundum si ponas 16, primum 3, solutionis numeri erunt ad nostros quatrupli. Sed industria Lectoris id comperiendũ relinquere malo, quàm in re facilima exponenda immorari.*

XXVI. Inuenito quatuor numeros, ea lege, ut cũ quiuis eorũ se cõtinuò insequẽti certã sui partẽ dederit: hac ultro citroq; facta detractione & additione, summarũ æqualitas exsistat. Primus secũdo sui trientẽ, tertio secundus sui quadrantẽ, tertius quarto sui quintantẽ, primo quartus sui sextantẽ tribuat: & cõtributione hac confecta, æqualitas exstet. Statuatur primus 3 N, ut triens eius haberi possit. Secundus 4 unitatũ, ut haberi quadrãs possit. Atq; hic, ubi quadrantẽ suũ abiecit, & primi triente postmodo est auctus, fit 1 N † 3. Ergo etiã primus suo triente amisso, adeptus deinde sextantẽ quarti, erit 1 N † 3. At amisso 1 N manẽt 2 N. Ergo sexta quarti pars, qua accepta fiat 1 N † 3, est 3 —— 1 N: quartus ergo 18 —— 6 N. Superest, ut quartus amisso sui sextante, ubi adsciuerit quintantẽ tertij, fiat 1 N † 3. at sextãte suo 3 —— 1 N spoliatus, retinet 15 —— 5 N. quod si ei addantur iã 6 N —— 12, fiet 1 N † 3. ergo 6 N —— 12 est quinta pars tertij. Tertius ergo 30 N —— 60. Tandẽ reliquum est, ut tertius abiecto sui quintante, deinde quadrãte secũdi auctus, faciat 1 N † 3. At quintante abiecto fit 24 N —— 48, quib. si iungatur quadrans secundi, erunt 24 N —— 47, æqualia 1 N † 3. Est ergo 1 N, $\frac{50}{23}$. & iuxta præscriptũ, primus erit $\frac{150}{23}$, secundus $\frac{92}{23}$. tertius $\frac{120}{23}$. quartus $\frac{114}{23}$. Abijciatur denominatio partiũ, erũt integri primus 150, secundus 92, tertius 120, quartus 114. qui & legib. quæstionis satisfaciunt.

## SCHOLION.

*1 N fit $\frac{50}{23}$ sic. Deprehensum est 23 N æquari 50. ergo 50 diuido per 23, fiunt $2\frac{4}{23}$. nã 2 in 23, fit 46: quatuor supersunt, quæ per 23 diuisa, ut in methodo partiendi ostensum est, fiunt $\frac{4}{23}$. Quia autem non ex diuersis forma Numerũ uult habere, puta ex unitatib. & minutijs: duas quoq; unitates mutetas resoluit in uigesimastertias particulas, nimirum in $\frac{46}{23}$, quibus adiectæ $\frac{4}{23}$, conficiunt $\frac{50}{23}$. Idem enim est dicere, 1 N esse $\frac{50}{23}$, uel esse cum 2 $\frac{4}{23}$. Partibus autem propositi sic satis fit. Ter 50, sunt 150. ergo cùm primum posuerimus 3 N, erit is $\frac{150}{23}$. Et cum secundus sit 4, erit $\frac{92}{23}$. nam quater 23 sunt 92. Tertius cum sit 30 N —— 60. quod ad 30 N attinet, erit $\frac{1500}{23}$. sed propter 60 subtrahendo, inde auferentur $\frac{1380}{23}$. nam sexagies 23, sunt 1380. supersunt $\frac{120}{23}$. tantus est tertius. Quartus ponebatur 18 — 6 N. Is propter 18, fit $\frac{414}{23}$. nam 18 in 23 faciunt 414. sed ob defectum 6 N auferre oportet $\frac{300}{23}$ (nã sexies $\frac{50}{23}$ tãtum faciunt.) Est ergo quartus $\frac{114}{23}$. Vt aũt intelligas quomodo 1 N fiat $\frac{50}{23}$, id quoq; tenendũ est: siue maior numerus minorẽ siue minor maiorẽ diuidat, numerum partium partiendo inuentarum semper cũ diuiso eundẽ fore: nomen aũt à partiente sumere. Verbi gratia, diuidamus 4 per 12, minorẽ per maiorẽ: dico cõpetere in quamuis unciam quatuor duodecima, qui est $\frac{1}{3}$ unitatis. & numerus quidem 4 idẽ est cum diuiso; nomen autem à partiente, duodecimarũ scilicet. Rursum partiamur 12 per 4, maiorẽ in minorẽ. proinde cõtingũt unicuiq; unitati qua-*

De diuisione seu partitiõe.

*ti quaternarij, duodecim quadrãtes, id est 3. & heic 12 est numerus partium, idẽ cum diuiso. nomẽ autẽ quadrãtum à partiente 4 ducitur. Ergo in hac quoq; proposita quæstione cum partiamur 50 maiorẽ numerum per 23 minorẽ, (maiorẽ dico. nã tametsi 50 & 23 N æqualia sunt, tamẽ absolutè 50 quàm 23 maior est numerus) unicuilibet unitati de 23 partes 50 attribuuntur uigesimætertiæ. & 50 numerus est partium, idẽ cum diuiso: nomen aũt à 23 partiente deductum. Quod si 23 per 50 diuisisset, cuius unitati ex 50, 23 quinquagesimæ obtigissent, numero partium 23, eodem cum diuiso: nomine deducto à partiente. Iam cùm unitas in 23 particulas sit distributa: quia secundus est positum 4: hunc in 23 duxit, & 92 inde orta pro secundo posuit: ac si numerus non $\frac{5}{23}$, sed 50 esset inuentus, quod idem in partib. quoq; reliquis propositis fecit. Cùm enim non soleat multis uti numeris in suis exemplis: ita etiã heic egit. & inuentis unitatis partibus, abijciatur, inquit, partiũ denominatio: id est, cũ 1 N sit $\frac{50}{23}$ inuentus, 50 illa iam non ut partes unitatum, sed ut integras unitates quinquaginta usurpa. Porrò æqualitas numerorũ hæc est. Primus 150 amisso quem secundo dat suo triente 50, retinet 100. & acceptis 19, sextante quarti, fit 119 Secundus 92 amisso quadrante 23, quem tertio dat, retinet 69. & triente primi, 50 acceptis, fit 119. Tertius 120 quintantem suum 24 dans quarto, retinet 96, & acceptis 23 quadrante secundi fit 119. Quartus 114 sextantem suum 19 dans primo, retinet 95: & quintante tertij, id est 24 accepto, fit 119.*

XYLANDRI.

*Satis omnia sunt explicata. & uides ut euitandarum secundarum radicum gratia positio primi & secundi instituta sunt, quas, itemq; solutionem quæstionis infinities uariari posse, superiori propositione monui. Cæterum quòd multiplicibus integris, loco partium fractarum utitur abiecta omnium communi denominatione, id iure facit, ut doctrina proportionum testatur. Quæ enim partium cognominum, eadem totorum inter se, ac uicissim est ratio Vide quintũ Euclidis.*

XXVII. Inueniantur tres numeri, quorum quiuis si certam partem reliquorum cõiunctorũ accipiat, omnium existat æqualitas. Accipiat primus reliquorũ summæ trientem: secundus summæ reliquorũ quadrantem: tertius summæ reliquorũ quintãtem: itaq; fiant omnes æquales. Esto primus numerus 1 N: reliquis aliquot unitatum multitudo tribuatur, compendij gratia, trientem habens. Sintq; secũdus & tertius coniuncti 3. Et quoniam primus triente reliquorum auctus fit 1 N † 1. sumantur omnia quater. Quater ergo secũdus cũ reliquis, est ter secũdus cũ tribus uniuersis. Atqui ter secundus adiunctis tribus fit 4 N † 4. unde si auferas 1 N † 3, relinquetur 3 N † 1, triplum secundi. Ergo secundus est 1 N † $\frac{1}{3}$. Oportet porrò tertiũ adsumto reliquorum tanquam unius quintante, fieri 1 N † 1. Omnia sumantur quinquies, & eadem ratione inuenietur tertius 1 N † $\frac{1}{2}$. Restat ut hi tres coniũcti faciant 1 N † 3. Inuenitur 1 N, $\frac{13}{12}$. & omissa denominatione partis, fit primus 13, secundus 17, tertius 19. & implent conditiones quæstionis.

SCHOLION.

*Expositis quotcunq; numeris, si unus eorum aliquoties sumatur, reliqui omnes semel: rursumq; omnes unà cum ipso semel sumantur, ipse autem semel minùs quã priùs sumebatur: summæ utriusq; seriei erunt æquales. Sint numeri 2, 3, 4. sumantur 2 & 4 semel, & ternarius quater: fient 18. rursum 2. 3. 4. & ternarius ter, 18. summæ æquales.* (Theorema scitum.) *His ita cõstitutis,* Omnia, *inquit, fiant quadrupla: nimirũ ubi loquitur de quadrãte. quincupla, ubi de quintãte. ac sic deinceps, Omnia, inquit: id est, & secũdus, & reliquorũ duorũ quadrans, quẽ adsumit. Et cùm reliquorũ duorum quadrãs ipsos duos numeros restituat: idẽ dicit, ac si dixisset, Sumatur secũdus quater, reliqui duo semel. Quãdo aũt, ut suprà demõstrauimus, unus quater, & reliquorũ quisq; semel positi, æquãtur ter illi, & omnib. semel sumtis: Ergo, ter secũdus, inquit, cũ trib. adscitis, erit 4 N † 4. Quod uerò dicit, tale est. Cùm primus reliquorũ duorũ triente adscito factus sit 1 N † 1, necesse est etiã secũdũ reliquorũ duorũ adsumto quadrãte, fieri 1 N † 1. Cæterùm quia ignoramus quãtus sit reliquorũ quadrãs: & tamẽ hoc adiecto secũdus sit futurus 1 N † 1: quadruplicetur ergo & ipse, & reliquorũ quadrãs: id est, ipse quater sumatur, reliquorũ uterq; semel: fient omnia 4 N † 4. cũ quidẽ secũdus semel, & reliquorũ quadrãs, 1 N † 1 cõficiant. Iã cũ idẽ sit secũdus quater & reliqui semel: atq; secũdus ter & tres singuli semel: si auferã tres numeros, hoc est, 1 N † 3 à 4 N † 4: (quod est ter secũdus, & tres semel) residuũ erit triplũ secundi, scilicet 3 N † 1. ergo ipse erit secundus 1 N † $\frac{1}{3}$. Idem spectemus in eo quod dicit,* Omnia sumantur quinquies. *Nam & heic similiter dicemus; Quinquies tertium adiunctis duobus, quater erit tertius unà cum tribus numeris propositis. Fiunt autem 5 N † 5. Vndè si auferas summam trium 1 N † 3, restat quadruplum tertij, 4 N † 2, ergo tertius 1 N † $\frac{1}{2}$. Primus porrò 1 N, secundus 1 N † $\frac{1}{3}$, tertius 1 N † $\frac{1}{2}$. coniuncti faciant 1 N † $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$. (id est 1 N † $\frac{5}{6}$.) atq; hoc æquatur 1 N † 3. Aufero utrinq; 1 N & $\frac{5}{6}$. relinquuntur æquales 2 N & 2 $\frac{1}{6}$. & fit 1 N, 1 $\frac{1}{12}$. Cùm autem heic duodecima pars inueniatur: liquet in duodecim uncias secari unitatem: & 1 $\frac{1}{12}$ sunt $\frac{13}{12}$. scilicet unitate in uncias secta, & uncia addita. Erit ergo unitas 12 unciarum, 1 N.*

autem

*autem 13 unciarum: & uncia superabit unitatem. Iam cùm emerserit $\frac{13}{12}$, eam in ternarium ab initio positum multiplicauit: ut fierēt 36, atq; ita 1 N procedet nō per partes unitatis, sed per unitates. Enimuerò sic abiecta partiū denominatione, ut pro $\frac{13}{12}$ usurpemus 13, idem poteris de canone,* Omnia quater, &c. *experiri: ita sanè, ut simul postulata quæstionis persequamur. Posito primo 13 unitatum, is reliquorum, qui sunt 17 & 19, iunctorū trientem accipiens, puta 12: fit 25. Oportet aūt secundū, 17, quadrante reliquorū iunctorū adsumpto, fieri 25. id sic fiet. Sumes 17 quater, id est 68: itē quadrantē reliquorū, 8, quater, habebis heic 32. hæc cōiuncta faciūt 100. Quod si 17 ter accipias, id est 51: & summā ipsorum trium, quæ est 49, detrahas à 100: relinquētur 51, scilicet triplum secundi. is ergo est 17. Eritq; 17 idē quod 1 N † $\frac{1}{3}$. scilicet 13 & 4. nam 4 est triens unitatis in 12 diuisa.*

XYLANDRI.

*Diligenter heic quoq; interpres id explicat, quod perobscurè à Diophanto fuit indicatū, & pro demōstrato usurpatū. Sed in Græco ipse canō mutilus est, quadā alia uitiosa. nostra trāslatio lectorē facilè expediet. Causa cur 13 pro $\frac{13}{12}$ uti liceat, superiore propositiōe est à nobis allata. Quod aūt interpres ait de numero 36. sic est intelligendum. Numeri a 1 N, b 1 N † $\frac{1}{3}$, c 1 N † $\frac{1}{2}$ sunt ex operatione Diophantea. quos si uelles interpretari (seu, ut loquuntur, resoluere,) posito 1 N esse 13. & statuere a esse 13, b 13 $\frac{1}{3}$, c 13 $\frac{1}{2}$, tota errares uia. resolui enim debent, per inuentū radicis ualorem, ac resoluti demum denominationem fractionis abijcere, ut pro integris habeantur. Ergo cum 1 N. sit $\frac{13}{12}$, a. & unitas faciat $\frac{12}{12}$: triens unitatis faciet $\frac{4}{12}$, & 1 N † $\frac{1}{3}$, erit $\frac{13}{12}$ & $\frac{4}{12}$, hoc est $\frac{17}{12}$. & semissis unitatis $\frac{6}{12}$ ad $\frac{13}{12}$ adiectus, c conficiet $\frac{19}{12}$. Iam $\frac{1}{3}$ ex $\frac{17}{12}$ fieret $\frac{17}{36}$, ex $\frac{19}{12}$ triens esset $\frac{19}{36}$, &c. sed denominatione abiecta duodena partis, numeri sunt 13. 17. 19. & 17 ac 19 faciunt 36, quorum triens 12 ad 13 additus, facit 25. rursum 13 & 19 sunt 32, quorum quadrans 8 medio additus, reddit 25. Item 13 & 17 sunt 30, quorum quintans 6 ad 19 adiunctus, præstat 25. Non pigebit aliā huius exempli cōfectionē subijcere: qua utereris, si theorema illud* Omnia quater, *non esset in mente aut in promptu. Ponamus a esse 1 N, & b cū c simul 3. ut expeditè primæ parti quæstionis satisfaciamus, & primus cum reliquorū triente habeat 1 N † 1. Iam si b ponamus esse 1 q (sic enim nunc radicem secundam seu quantitatem ignotam libet notare) erit c numerū 3 —— 1 q. huius, & a trientem si adiungamus ad 1 q, erunt $\frac{3}{4}$ q † $\frac{1}{4}$ N † $\frac{3}{4}$ || 1 N † 1. & si omnia quadruplices, 3 q † 1 N † 3 æquabuntur 4 N † 4. ergo æqualibus utrinq; abiectis 3 q || 3 N † 1. & 1 q facit 1 N † $\frac{1}{3}$. hoc est secūdus, quem si à 3 aufers, erit is 2 $\frac{2}{3}$ —— 1 N. Huic quintam partē a & b, puta $\frac{2}{5}$ N † $\frac{1}{15}$ N adde, fiet 2 $\frac{11}{15}$ —— $\frac{3}{5}$ N, æquale 1 N † 1. Omnia si per 15 multiplices, habebis 41 —— 9 N || 15 N † 15 fiet 1 N $\frac{13}{12}$. & positiones numerorum reducta, denuum communē abijcient denominationem, eruntq; pro fractis integri. Uariari solutionem posse huius problematis, satis constat ex suprà annotatis.*

XXIIX. Inueniantur quatuor numeri, ut cùm quisq; horum à reliquis trib. in unā summā collectis pręscriptā partē acceperit, omniū æqualitas exsistat. Primus accipiat trientē reliquorū: secundus quadrantē: tertius quintantē: quintus sextantē. Eoq; cōfecto negocio, oēs numeri sint æquales. Statuamus primū 1 N. tres reliquos aliquot unitatū numerū, qui trientē habeat, sitq; 3. Ergo primus, ubi à reliquis in unū collectis numerū trientē acceperit, est 1 N † 1. Oportebit ergo etiā secundū, si à trib. cæteris in unā coactis quadrantē acceperit, fieri 1 N † 1. Rursum omnia quadruplicabimus: utemurq; methodo quā in præcedēte adhibuimus quæstione. Ita inueniemus secūdū 1 N † $\frac{1}{3}$. tertiū 1 N † $\frac{1}{2}$. quartū 1 N † $\frac{3}{5}$. At quatuor numerorū summa debet esse 1 N † 3. Omnib. cōfectis, 1 N fit $\frac{47}{90}$. Eritq; primus 47. secundus 77. tertius 92. quartus 101. Hi præstant ea, quæ requirit propositum.

SCHOLION.

*Quod 1 N deprabenditur esse $\frac{47}{90}$, id sic euenit. Quatuor inuentorum numerorum summa est 4 N, & $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{5}$: hæc æquantur 1 N † 3, quam omnium esse summam, ab initio fuit positum. Aufer utrinq; 1 N † $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{5}$. relinquuntur ab una parte 3 N, ab altera 1 & $\frac{2}{5}$ & $\frac{1}{6}$. Nam cùm sint tres unitates: ab harum una aufero $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{2}$, relinquitur $\frac{1}{6}$. Ab alia $\frac{3}{5}$ subtraho, relinquuntur $\frac{2}{5}$. Ergo tres Numeri æquantur 1 $\frac{1}{6}$. & $\frac{2}{5}$, & 1 N fit $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{18}$. $\frac{2}{15}$ (scilicet $\frac{2}{3}$ ex $\frac{1}{5}$.) cū singularum partiū denominationes per 3 multiplicari ratio iubeat. Enimuerò cùm quantus sit 1 N, non in integris, sed in fractis est inuentum unitatibus: fundum quæro horum numerorum, quib. fracta denominantur. id est, numerū quē omnes huiusmodi nominum partes habeat. is autem est 90. Nam huius triens est 30 $\frac{2}{15}$ (scilicet quintantis bes.) est 12. cùm quintās sit 18. Pars decimaoctaua est 5. Iam 30. 12. & 5. sunt 47. & scinditur unitas in 47, estq; numerus $\frac{47}{90}$ unitatis, minor scilicet unitate: maior fit, abiecta denominatione. Quomodo aūt inueniatur fundus partes habēs requisitas, hinc intelligi potest. Exponātur numeri, à quib. partiū nomina sumūtur, & cōsidera primū & secundū:*

Inuētio numeri q partes habeat propositas.

qui

*qui si primi inuicem sunt, duc alterum in alterum, productum appellabis fundum numerorum qui partes habent primo & secundo cognomines. Si uerò compositi sunt, productum diuide per communem eorum mensuram, quotiens fundus erit. Porrò hunc ita inuentum fundum cum tertio compara, & eodem prorsus omnia modo confice. Exemplum. Fundum, siue numerum inuenire uolo qui habeat partes, semissem, trientem, quadrantem, quintantem. Expono numeros partiũ cognomines 2, 3, 4, 5. Et cùm 2 ad 3 primus sit, multiplicatis ijs produco 6. quem fundum appello habentium semissem ac trientem: neq; alius minor ipso istas partes habebit. Iam 6 & 4 compositi inuicẽ, cõmuni mẽsura, binario diuiduntur. multiplicatio eorum gignit 24: huius producti semissem, puta cognominem mensuræ communi, accipio 12. is est fundus habentium $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Rursus 12 per 5 multiplico, fiunt 60. qui, cum 12 & 5 primi inuicẽ sint, fundus dicetur habentiũ partes $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. Alia ratio. ubi primi inuicem sint numeri, ages ut prius. Si uerò cõpositi occurrent, uterq; nimirũ partẽ habebit cõmuni mensuræ cognominẽ. hanc alterius partẽ in alterũ ducito, producetur fundus. rursumq; hunc cũ tertio cõpara, ac deinceps ita perge. Quæratur fundus habentiũ partes $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$. Expono numeros his partib. cognomines 3, 4, 5, 6. & cũ 3 ac 4 primi sint, productũ eorũ 12 aio fundũ esse habentium $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. Rursus quia 12 & 5 primi sunt, ex ijs procreatum 60 dico fundũ esse habentiũ $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. Porrò cùm 60 & 6 cõpositi sint, & eorũ cõmunis mensura ipse 6: uterq; eorũ sextantẽ habebit, maior 10, minor 1. utrius ergo sextantẽ in totũ alterũ multiplicauero, (siue 1 in 60, siue 10 in 6) rursum 60 fient. pronũcio itaq; 60 esse fundũ habentiũ $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$. ac sic deinceps. Ac tenendũ est, duntaxat eos numeros qui sic inueniuntur, et eorũ multiplices, nullũ omnino aliũ partes requisitas habere. Heic ergo cũ agatur de $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$, & $\frac{1}{18}$. expono numeros, 3, 5, 18. Et cũ 3 ad 5 sit primus, productus ex ijs 15, fundus est habentiũ $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$. Rursus 15 & 18 cõpositi, cõmunem mensuram habent 3, & uterq; itaq; trientẽ: 15 scilicet 5, 18 aũt 6 Siue ergo 5 in 18, siue 6 in 15 ducas, 90 exsistet. & ob id unitas secatur in nonagesimas partes. Deniq; primus numerus, qui est 1 N, est 47. Secũdus 1 N † $\frac{1}{3}$, id est 47 & 30 (hic enim est triens è 90) fit 77. Tertius 1 N † $\frac{1}{2}$, id est 47 & 45 (qui est semissis de 90) fit 92. Quartus 1 N † $\frac{3}{5}$, est 47 & 54 (sunt aũt 54 de 90, $\frac{3}{5}$) scilicet 101. Et primus 47, cũ 90, ut reliquorũ triente, facit 137. Secundus 77, cum 60 quadrante reliquorũ, facit 137. Tertius 92 cũ 45 quintante reliquorum facit 137. Quartus 101 cum 36 sextante reliquorum, facit 137.*

XYLANDRI.

*Huius exempli tractatio tota pẽdet à superiori, & est satis fideliter à scholiaste explicata, nisi quod scholion sæpe est mutilũ, & uitiatũ: quod ex mea uersione restitui poterit, & rectius etiam intelligi. – Maior fit. abiecta denominatione.) ὸ δ' ἐν ἄλλας μείζων est in Græco: nulla sentẽtia. Ego rẽ secutus sum. Fundum, πυθμένα, uocat minimum numerum, qui citra minutias habeat partes omnes quarum nomina proponuntur.*

XXIX. Datis duob. numeris inuenire tertiũ, qui ductus in priorũ utrũq;, alterum quadratũ efficiat, alterũ latus eius quadrati. Sint dati numeri 200 & 5. is aũt qui quæritur, 1 N. qui in 200 ductus, gignit 200 N: in 5, 5 N. Et cũ alter horũ quadratũ, alter eius quadrati latus debeat esse, 5 N in se multiplicati fient 25 q: æquales 200 N. Iã utrinq; Numeri charactere nomina deminuantur, erũt 25 N æquales 200, & 1 N fit 8. ac quæstioni is satis facit.

SCHOLION.

*Quadrati 25 æquantur 200, sic. Si tres sint numeri, quorũ secũdi in tertiũ multiplicatione numerus fiat idẽ gerens nomen cũ ratione quæ est primi ad tertiũ: quod fit ductu primi in secundũ, æquale erit quadrato eius quod ex secũdo in tertiũ fiebat: atq; hoc rursum in tertiũ ducto, producetur æquale primo Sint tres numeri, 36. 4. 3. 4 in 3 faciunt 12. & 36 ad 3 est duodecuplus, à 12 habẽte nomẽ ratione. Ergo quod fit ex primo in secundũ, 36 in 4, utpote 144, æquale est quadrato eius quod fiebat secundo in tertiũ ducto. & quod è tertio ducto in id quod è secundo in tertiũ fiebat producitur, 3 in 12, nimirũ 36, æquale est primi. Ergo si numerus ad numerũ habet aliquã rationẽ, & numerus utiq; erit aliquis qui in minorẽ ductus numerũ gignat, denominantẽ maioris rationẽ ad minorem. Idq; exercitationis causa plenioris demonstremus in numeris fractis. Sint duo numeri 13 & 2, estq; ratio maioris ad minorẽ sescuplasesquialtera. erit ergo numerus, qui in 2 multiplicatus 6 $\frac{1}{2}$ (id enim rationis dictæ est nomẽ) producat. diuidatur 6 $\frac{1}{2}$ per minorẽ, 2 inquã, exsistent 3 $\frac{1}{4}$. hic est, qui in 2 ductus, 6 $\frac{1}{2}$ producat. Ac sunt tres numeri, 13. 3 $\frac{1}{4}$. 2 in quib. idẽ quod in prioribus liceat spectare. Primus in secundũ producit 42 $\frac{1}{4}$ (nã ter 13, sunt 39. quib. additur 3 $\frac{1}{4}$, 13 quadrãtes) secũdus in tertiũ, gignit 6 $\frac{1}{2}$, cuius quadratũ itidẽ 42 $\frac{1}{4}$. (Sexies 6, sunt 36. sexies $\frac{1}{2}$, 3. semissis de 6, 3. semissis de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Summa particularũ 42 $\frac{1}{4}$) Et denuò 6 $\frac{1}{2}$ per tertium 2, multiplicatũ gignit 13. Itaq; hæc etiam cùm 200 ad 5 rationem habeant quadragintuplam, erit aliquis numerus, qui in 5 multiplicatus, 40 producat, unde rationi nomen est. Deinde 40 per 5, habes 8. is multiplicatus in 200, producet 1600, quos uocat 200 N, quia 1600 hunc 8, ducenties continet. Idem 8 in 5 multiplicatus 40 gignit, quos uocat 5 N. nam 40 numerum 8 quinquies continet. Rursum 5 N. seu 40, in se ducti, faciunt q 25, id est 1600.*

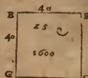
Nam

*Nam cum q de 8 sit 64, & 1600 uicies quinquies hunc 64 comprehendat: utiq; 25 q sunt 1600, quadratum à 5 N. id est, 40, procreatum: & aequantur 200 N, qui & ipsi sunt 1600. Cùm hoc modo demonstrauisset 25 q aequari 200 N: subijcit deinde,*

Deminutio seu depressio characterũ.

Iã utrinq; Numeri charactere nomina denũciantur. *Sicut enim prius à similibus similia iusserat auferri, ita nunc alia uia utitur, uno numero iubens omnia deminui: id est, deduci q in N, & N in unitates nomi-*




*ne carentes: ut fiant de 25 q, iam 25 N: & de 200 N, 200. diuisoq; hoc numero per priorem, inuenitur 1 N esse 8. Is in 200 multiplicatus, 1600 quadratum, in 5 multiplicatus, 40 eius quadrati latus gignit. Demonstratur autem etiam 14 propositione sexti elementorum, aequalium, & angulo alterius aequalem angulum habentium parallelogrammorum latera esse reciproca, quae angulos aequales conficiunt. Describantur duo parallelogrãma a b & b c, aequalibus ad b angulis, utrinsq; area 1600. & alterum sit, nempe a b, 200 N. alterum b c, 25 q. Latus d b est quincuplum ad b e, & uicissim b e quincuplum ad b f. & 1 N inuenitur 8.*

Canõ de Quadrato & latere in numeris.

*Aliter, ad illud,* Iam utrinque Numeri charactere. *Cùm inuenerimus 25 q aequari 200 N, ergo in unum q, competunt 8 N. At quadratum 8 Numeros continens esse potest nullum, nisi quod sit 8 unitatibus in se ductis confectũ: ut 1 N scilicet sit 8. Ergo cùm q sit 8 N, 1 N erit 8 unitates. In uniuersum enim, quot Numerorum erit Quadratum, tot unitatũ erit Numerus. Nam N seipsum ducens in suas quibus constat unitates, facit q. ut si N sit 2, q fiat 2 N: si N 3, q 3 N: & sic deinceps. Haec expositio praestat priori.*

XYLANDRI.

*Non nemini etiam nimius fortasse uidebitur scholiastes heic fuisse, in re minimè obscura. sed inutilia non sunt, quae tradit. Locus de parallelogrammis in Graeco est lacer: ergo totũ posui. Quod attinet ad istum ὑποβιβασμὸν, cùm q aequantur N, quod minoris nota utrinq; aufertur: Est in Algebrula nostra explicatum. Depressionem hanc characterum nonnulli uocant. Id quoq; principium heic usurpatur, Numeri quadratum omnis, numeri ipsius esse multiplex. id enim uerum est in integris, & integris quibus fractio est adiecta. in solis minutijs contra semper quadratum minus esto latere. de quo alibi. Haec autem exempla, & similia, ab artificibus ponuntur, ut eorum*

Canon.

*occasione praeceptiones declarentur. Alioqui tales quaestiones nullam requirunt Algebram. semper enim minoris quadrato si diuidatur maior numerus, prodetur is qui quaeritur: Et duo propositi numeri, si quidem in numeris non surdis & integris quaestio consistit, semper sunt quadratorum similes. Ita datis 72 & 2, ea lege ut tertius eos multiplicãs, quadratum & latus eius producat: quadratum minoris 4, ergo numerus qui quaeritur, 18. producti 1296 & 36: hic latus illius quadrati. De fractis. Dentur 80 & 16, eadem lege. Quadratum minoris 256, si diuidat maiorem 80, fient $\frac{5}{16}$, is qui quaeritur. ductus in utrunq;, conficit 25 & 5. Propositiones elementorum quae citantur, Euclidea sunt.*

XXX. Inueniantur duo numeri, quorum summa & ex multiplicatione unius in alterum productus tanti sint, quantos poscimus. Oportet autẽ numerorum inuentorum summae quadratum, quadrato superare numerum qui ex ipsorum fit multiplicatione. Hoc autem est effictum aliunde. Esto summa numerorum 20, productum multiplicationis 96. Ponamus eorum interuallum 2 N. & cum summa ipsorũ sit 20, si huius semissem accepero 10, & differẽtiae semissem 1 N, & adiecero & detraxero semissi summae: rursum summa erit 20, partium interuallum 2 N. Ponatur ergo maior numerorum 10 + 1 N, erit minor 10 —— 1 N. manetq; & summa eadem, & idẽ interuallum. Restat ut uno in alterum multiplicato producatur 96. At producitur 100 —— 1 q. quod aequatur 96. & 1 N, fit 2. Ergo maior est 12, minor 8. & implent propositae quaestionis leges.

SCHOLION.

*Est adiecta huic quaestioni conditio quaedam, nec non & aliquot sequentibus. Eas Diophantus uocat (mea quidem opinione) aliunde effictas. quia huiusmodi conditiones non quosdam numeros habent obnoxios, quosdam secus: sed omnes in uniuersum numeri ijs deuinciuntur, neq; ulli sunt, in quos eae non cõpetant. itaq; huius generis clausulae non rectè conditiones aut limitationes appellantur. Nihil autem aliud conditio praesenti quaestioni adiecta di-*

*cit, quam*

cit, quàm quod habet quinta propositio libri Elementorum secundi. Est autem hæc. Si recta linea in partes secetur æquales, itemq; inæquales: rectangulum ab inæqualibus totius portionibus comprænhensum cum quadrato differentiæ portionum, æquale est semissis lineæ quadrato. ſ Tamen quæstio limitatione quadam indiget, quam sic explicabimus. Necesse est ut quadratū semissis summæ maius sit producto partium unius in alteram. Vt hic. Summæ (20) semissis 10, eius quadratum 100, amplius quam 96. (neq; enim hoc loco defectum Quadrati unius consideramus.) Cæterùm 10 † 1 N in 10 —— 1 N, fiunt 100 —— 1 q iuxta Indicam methodum sic. Defectus 1 N in 10, facit defectum 10 N defectus 1 N in copiam 1 N, & 10 in 10, faciunt 100 —— 1 q. & 1 N in 10, facit 10 N. Ita conficiuntur 10 N † 100 —— 1 q —— 10 N. & cum defectus 10 N eorum præsentiam uicißim oblitteret, relinquuntur 100 —— 1 q. Quod si unitates æquarentur unitatibus ab altera parte, aut etiam eas excederent: non staret res. fierent enim 1 q & aliquot unitates, æquales nihilo. Iam quod fit à 10 † 1 N in 10 —— 1 N, ait fieri 100 —— 1 q: rectè. Cùm enim defectus in copiam ductus, defectum gignat, & N in N, procreet quadratum: rectè etiam heic defectus 1 N in eius præsentiam ductus, absentiā 1 Quadrati produxit. Deniq; cùm latus Quadrati inueniatur 2, erit 1 q 4. & 100 —— 1 q æquantur 96, additoq; defectu utrobiq; 100 æquantur 1 q † 96. & ab æqualibus si æqualia abijciantur, 1 q erit 4, & 1 N est 2.

Aliter. Hoc autem est aliunde effictum.) Id limitationis gratia dicit: nempe ne æquales sint quos quærimus numeri, sed inæquales. alioqui enim neq; demonstratio succedet, neq; conditioni stabitur. Neq; uero inæquales tantum esse oportebit, sed præter etiam seruanda est altera, quam exposuimus, conditio.

XYLANDRI.

*Cardanus, Stifelius, alijq́; ostenderunt hanc, quam heic tradit Diophantus, summæ in duas partes seu positiones diuidendi rationem, quarum altera tanto excedat semissem, quanto altera exceditur ab eo (ut heic 20 in 10, † 1 N & 10 —— 1 N.) sæpenumero conducere ad explicandas quæstiones, alioqui insolubiles. quod suo loco ostendimus quale sit. Certè heic ut absq; hoc compendio, sicut uidebis, explicari res poßit: tamen incidet opus in connexam æquationem, ubi diuersæ duæ species uni comparantur. at Diophantea oppidò simplex manet. Quod autem ad πλασματικὸν illud seu (ut nos uertimus) aliunde effictum attinet: ideò sic appellari non dubito, quia etsi hanc conditionem non feras: tamen omnino & inuenti numeri inæquales erunt, & productum ipsorum quadrato numero superabitur à summæ semißis quadrato. Id demonstrat quinta secundi Euclidis, eruditè huc à scholiaste ad partes uocata. nam diuisio hæc summæ in duas partes, ad diuisionem rectæ lineæ est accommodata, atq; adeò inde efficta. ut & nos suo loco monuimus, & Campanus ad decimamsextam noni. Sed & inductione experiri libet. & subijciam tria exempla. Sint numeri 6 & 22. summa 28. productum 132. semißis summæ 14, quadratum 196. aufer 132, residuum 64 quadratus. Item numeri 14 & 21. summa 35. productum 294. Semißis summæ $17\frac{1}{2}$, quadratum $306\frac{1}{4}$. aufer 294, restat $12\frac{1}{4}$, qui habet radicem quadratam $3\frac{1}{2}$. Deniq; numeri $2\frac{2}{3}$ & $7\frac{5}{6}$. Summa $10\frac{1}{2}$. productum $20\frac{8}{9}$. Summæ dimidium $5\frac{1}{4}$, quadratum $\frac{441}{16}$. inde aufer productum, restat $\frac{961}{144}$ quadratus. Quod si numerorum in proposita quæstione statuisset alterum 1 N, alter erat 20 —— 1 N. cum summa sit 20. duc 1 N in 20 —— 1 N, habes 20 N —— 1 Z || 96. id est facta traiectione, quam suo loco docuimus, 1 Z || 20 N —— 96. fit 1 N 12 uel 8. quæ est sexta Christiferi Rodolphi regula. Quod idem aliter etiam euenisset. Nam altero posito 1 N, per hūc diuisus 96, alterum exhibebit $\frac{96}{1}$ N. quo addito ad priorē, summa $\frac{1Z + 96}{1N}$ æquabitur 20. id est facta reductione & traiectione, 1 Z || 20 N —— 96. ut antè. Enimuerò Canon à me ad quintā secundi traditus, huc etiā potest accommodari, & citra Algebram quæstioni satis fieri. Nam 8. √96. & 12. sunt continuè proportionales: & producti quod heic quæritur radix quadrata semper medio loco inter partes summæ stabit. Ergo summæ semissem semper in sese duc, à quadrato* Canon. *sic facto ipsum productū aufer; residui radix quadrata addita & detracta semißi summæ, partes ostendet. Dentur ergo duo numeri, quorum summa 76, productum 1120. Semißis summæ, 38, quadratum est 1444: unde si 1120 auferas, relinquitur 324. cuius radix quadrata 18 additur & adimitur dicto semißi, fiunt partes 56 & 20. Propositionem hanc scholiastes uigesimamseptimam facit, quia tria problemata fuerunt binis propositionibus tractata. sic sequentem, uocat uigesimamoctauam, quæ nobis est trigesimaprima. Ita ultimam huius libri trigesimamnonam appellat, cum sit 43. quia quadragesimasecunda tantùm porisma fuit superiorum. Quæ mendosa sunt, tuo Marte facilè corriges in Græco, nostræ ductu uersionis.*

XXXI. Dare duos numeros, quorū summa, & summa itē quadratorū ab ipsis qui fiunt, exprimat mādatos numeros. Oportet autem duplum summæ quadratorum utriusque, quadrato numero præstare & quadrato, quod est summæ ipsorum. Hoc

quoq; aliunde effictum est. Statuamus summam numerorum esse 20, quadratorum 208. Statuamus etiam, interuallum eorum 2 N esse. Erit ergo maior 1 N † 10. minor 10 — 1 N, alter summę semisse maior Numero, alter eodem minor: differentia ipsorum, 2 N, manente summa 20. Superest, ut etiam quadratorum ab ijs ortorū summa sit 208. atqui hæc inuenitur 2 Q † 200. id ergo æquatur 208. & fit 1 N, 2. Ad rem. maior ergo 12, minor 8. & soluitur quæstio.

SCHOLION.

*Hæc quoq; conditio plasmatica est, & uidetur abundare: nisi fortè id dicit, quòd indicatum est, numeros inæquales debere esse. Nos autem heic limitationem hancce proponimus. Duplum quadrati de semisse summæ oportet minus esse summa quadratorum. Nam & heic duplum quadrati à 10, qui est semissis summæ, scilicet 200, minus est summa quadratorum 208. nam si æquarentur heic, aut illud hoc maius fieret: res non constaret. Quod autem numerorum quadrata faciunt 200 † 2 Q. id sic euenit. Quadratum de 10 † 1 N est 100 † 1 Q † 20 N. quadratū de 10 — 1 N fit 100 † 1 Q — 20 N, ob canones alibi explicatos. Hæc ubi colligūtur, — 20 N & † 20 N se mutuò perimunt, & relinquitur summa quadratorum 200 † 2 Q. reliqua sunt manifesta.*

XYLANDRI.

*Ex eo typo, quem ad æquationem Algebricam expediendam adieci quinta prop. libri secundi Elementorum: facilè intelliges cur hanc quoq; conditionem plasma uocarit Diophantus. nam scholiastis limitatio eòdem recidit. Sed & inductione idem possis deprehendere in alijs exemplis. Numeri 6 & 13. summa 19. quadratorum 36 & 169. summa 205. duplum 410. summæ quadratum 361 inde ablatum, relinquit 49 quadratum, &c. Vis compendij heic eadem elucescit. Quadratum autem illud, quo duplum summa quadratorum partium præstat quadrato summæ, semper est quadratum differentiæ numerorum. Ergo* CANON *sic condetur.*

CANON. Duplica summam quadratorum à partibus profectorum, inde quadratum summæ quam numeri quæstionis debent conficere, aufer: residuæ radix partium discrimen ostendit: ergo eius semissis si addatur adimaturq; semissi summæ numerorum, ipsi se prodent. *Hæc omnia suam habent demonstrationē in ijs, quæ ad quintam secundi pertinent. Exemplum unicum proponemus. Quæremus duos numeros, quorum summa 19, quadratorum 205. Duplico 205 fiunt 410. summæ quadratum 361. inde detractum, relinquit 49. (omnino, & semper quadratum) eius radix 7. differentia partium. semissis summæ numerorum $9\frac{1}{2}$. semissis differentiæ $3\frac{1}{2}$: ad $9\frac{1}{2}$. Ergo maior 13. Ergo minor 6, quia $3\frac{1}{2}$ de $9\frac{1}{2}$: aut 13 de 19 tantum relinquunt. Si lubet experiri per uulgatam uiam, ut ponas in autoris exemplo numeros 1 N & 20 — 1 N, per me licet. & heic ignoscendum est discentibus. Sed certè Diophantea subtilitas est laudibus uehenda.*

XXXII. Inueniendi sunt duo numeri quorum summa, itemq; alterius quadratē supra quadratum alterius excessus eam, quam postulamur, quantitatē utrumq; habeat. Esto summa numerorum 20, quadrati unius supra alterum excessus 80. Statuamus differentiam ipsorum 2 N, ut maior sit 10 † 1 N, minor 10 — 1 N. summa 20, differentia 2 N. Superest ut quadratorum etiam ab ipsis ortorum interuallum sit 80. est autem 40 N: atq; hi æquantur 80. fit rursum maior 12, minor 8, & quæstio soluitur.

SCHOLION.

*Hæc quæstio nullam requirit limitationem, procedit enim in quibuslibet numeris, etiam si summā numerorum & interuallum quadratorum ponamus idem. Quod autem quadratorum interuallum in hac quæstione sit 40 N: id sic habet. Quadratum alterum est 100 † 1 Q † 20 N: alterum 100 † 1 Q — 20 N. hæc si coniungenda essent, tolleret — 20 N alterorum 20 N præsentiam. Nunc cum tantùm excessus consideretur, † 20 N supra — 20. N est amplius 20 N & seipso: & coniunctis copia ac penuria, fit excessus 40 N.*

XYLANDRI.

*Si poneres summā numerorum 5, & tantundem quadratorum interuallum, numeri 2 & 3 proposito quadrarent: immò quiuis duo unitate differentes, quod ex quadratorum natura ostendi potest. nam quadratum de 16 (uerbi gratia) fit, si quadrato de 15 adijcias 31, id est 16 & 15, &c. Si uoles per Algebram experiri. pone alterum 1, alterum 1 N. Summa 2 N † 1. Quadrata 1 Z & 1 Z † 2 N † 1. aufer utrinq; 1 Z restant 2 N, † 1 æqualia 2 N, † 1, idem eidem. ergo quiuis numerus & proximè maior uno satisfacient. In autoris exemplo diuisio 20 in 10 † 1 N & 10 — 1 N nullo labore nos leuat aliquo. Ponamus partes esse 1 N & 20 — 1 N, erunt quadrata 1 Z & 1 Z † 400 — 40 N. ab hoc illud aufer, restāt 400 — 40 N || 80 hoc est 40 N |.|*

320.

*380. 1 N 8. huius quadratum 64. altera pars 12, quadratum 144, 80 amplius priore. Caeterùm quadratorum interuallum cur ſit 40 N, obſcurius quidem, uerùm doctè interpres oſtendit. Simpliciſſimū eſt è canone ſubtractionis id animaduertere. Nam de quadrato 100 † 1 q † 20 N, maiore, ſi minus detrahatur 100 † 1 q —— 20 N, unitatibus & Q ſe abolentibus, ſignū —— ad —— 20 N oſtendit amplius fuiſſe ſubtractum quàm debuit, ſcilicet 20 N. adduntur ergò ad maioris 20 N, & interuallum perhibetur 40 N.*

XXXIII. Inueniantur duo numeri, quorum interuallum & qui fit altero, in alterū multiplicato, exhibeant eos qui praeſcribuntur numeros. Neceſſe eſt autē quadruplum producti multiplicatione eorum cum quadrato interualli iunctum, conficere quadratum. Quod & ipſum effictum aliunde eſt. Sit interuallū 4, productus 96. Ponamus ſummam eorum 2 N, & cùm interuallum ſit nobis dictum 4, erit maior 1 N † 2, minor 1 N —— 2: manente & ſumma eorum 2 N, & interuallo 4. Reſtat ut multiplicatio eorum producat 96. at gignit 1 q —— 4. haec aequantur 96. fit rurſus maior 12, minor 8, & implent poſtulata quaeſtionis.

SCHOLION.

*Ne hoc quidem limitatione opus habet. Quod autem 1 N † 2 in 1 N —— 2, 1 q —— 4 producit, ſic habet. 1 N in 1 N, facit 1 q. in —— 2, —— 2 N gignit. rurſus 2 in 1 N, 2 N producit, & in —— 2, —— 4. Et iam —— 2 N abolito praeſentia 2 N, ſupereſt 1 q —— 4, &c.*

XYLANDRI.

*Certè limitationem hanc non modo experientia confirmat, ſed palàm demonſtratur octaua propoſitione ſecundi. Et quidem quadratus qui ſic conficitur, ſemper eſt quadratū ſumma ipſorum numerorum. Numeri 8 & 21. interuallum 13, productum 168. hoc quater, 672, adde 169 quadratum interualli, ſumma 841, radix 29, ſumma numerorum. Numeri 10 & 25, productū 250. id quater, 1000: adde 225, ſumma 1225, radix 35, ſumma numerorum.* Canon *quoq; hinc extruetur.* Datū productū *quadruplica, adde quadratum interualli, radix ſumma quadrata, ſummam numerorum monſtrabit. Ei ſi addas & adimas interuallum, ſemiſſis ſumma & reſidui exhibebunt numeros. Ita heic 96 quadruplicato, 384, adde 16, quadratum interualli, ſumma 400. radix 20. ergo $\frac{1}{2}$ de 24 & 16 numeri. Ponamus interuallum 12, productum 200. Huius quadruplum 800, adde 144, quadratum interualli, ſumma 944. Hic numerus eſt ſurdus: & in ueris ergo numeris non datur ſolutio huius quaeſtionis. Idē etiā Algebrica operatio monſtrabit, ubi rurſus Diophantea eſt breuior & ſubtilior quam uulgata. numeri 1 N † 6 & 1 N —— 6. fit 1 Z —— 36 aequale 200. hoc eſt 1 Z || 236. √236 ergo eſt 1 N. & numeri √236 † 6, ac √236 —— 6. quorum interuallum 12, productum (binomij in reſiduum) 200. ſumma √944. id eſt, bis √236. nam † 6 & —— 6 ſe abolent. Quod demonſtrandum duxi: neſcio qui praeteritum à ſcholiaſta.*

XXXIV. Dentur duo numeri certa quadam ratione, ita ut eorum quadratorum ſumma ad numerorum ſummam eam teneat quae poſcitur rationem. Sit maior numerus minoris triplus. ſumma quadratorum ad ipſorum ſummam quincupla. Eſto minor 1 N, maior ergo 3 N. ſumma 4 N. Summa quadratorum 10 q, quincuplum ad 4 N. ergo 20 N aequantur 10 q. fit 1 N, 2. & eſt minor 2, maior 6: ac poſtulatis quęſtionis ſatisfaciunt.

SCHOLION.

Fit 1 N 2.) *id ſic inuenitur. Cum 10 q aequentur 20 N: competunt in unumquemq; quadratū 2. Numeri. Non eſt autē alius quadratus qui 2 N poſſit, demto cuius latus eſt 2. ſicut nullus qui 3 N ualeat, demto cuius latus 3. Quot enim Numerorum eſt Quadratus, tot unitatum eſt Numerus: ac uice uerſa. atq; hoc pertinet ad deminutionem illam notarum ſiue characterū. Numeri iuncti 8, quadratorum ſumma 40, quod eſt quincuplum ad 8.*

XXXV. Dentur duo numeri ratione certa, ita ut ſumma quadratorum ab ijs creatorum, ad ipſorum numerorum interſtitium certam habeat rationem. Statuamus maiorem minoris triplum eſſe: ſummam autem quadratorum ad interſtitium numerorū decuplā. Sit minor 1 N, maior erit 3 N. Summa quadratorum decupla eſſe debet ad interuallum numerorum. Eſt autem illa 10 q, hoc 2 N, ergo illud huius

 decuplum.

decuplum. Ergo 10 q æquantur 20 N. Vnitate utrinq; deminuto charactere, 10 N æquales 20. Ergo minor 2, maior 6. & fit, quod postulabatur.

SCHOLION.

*Numerus 6 ad 2 est triplus. quadratum à 6, est 36, & à 2 quadratum 4: summa 40. Interstitium inter 2 & 6, est 4. 40 autem huius decuplum.*

XXXVI. Inueniantur duo numeri datæ rationis, ut interuallum quadratorum quæ ab ijs fiunt ad summam numerorum certam habeat rationem. Esto maior minoris triplus: interuallum quadratorum ab ipsis ortorum sescuplum summæ numerorum. Statuatur minor 1 N. erit maior 3 N. restat ut etiam quadratorum interuallũ sescuplum sit summæ numerorum. Quadratorum interuallum est 8 Q, numerorũ summa 4 N. Ergo 8 Q sescuplum sunt ad 4 N. itaq; 24 N. æquales 8 Q. Fit 1 N 3, & soluitur quæstio.

SCHOLION.

*Triplus est 9 ad 3. quadratus illius 81, huius 9: interstitium 72. eius sextans est 12, summa numerorum 3 & 9.*

XXXVII. Inueniantur duo numeri in data ratione, ut etiam quadratorum quæ ab ijs fiunt interuallum ad interuallum ipsorum numerorum rationem habeat quæ petitur. Esto maior minoris triplus, quadratorum interuallum ad numerorum interuallum duodecuplæ rationis. Statuamus minorem 1 N, erit maior 3 N. Superest, ut etiam quadratorum interuallum ad numerorum interuallum sit duodecuplum. Atqui hoc est 2 N, illud 8 q. itaq; hoc illius est duodecuplũ: & proinde 24 N æquantur 8 q. Fitq; rursum 1 N 3. & aperta est demonstratio. Similiter hac ipsa ratione inuenientur duo numeri rationis propositæ, ut ex multiplicatione eorum productus ad summam eorum rationem habeat præscriptam. Et rursum duo numeri certæ rationis, ut ex multiplicatione eorum productus ad ipsorum interuallum rationem eam habeat, quæ mandatur.

SCHOLION.

*Numeri 3 triplus est 9, & eum superat numero 6. Quadratum maioris 81, quadrato minoris 9, præstat numero 72. qui ad 6 est duodecuplus.* Porisma *autem illud, seu additamentum, sic habet. Sit maior minoris triplus: productum multiplicationis ad summam numerorum dupla sesquiquarta. Sit minor 1 N, erit maior 3 N. producunt autem alterum in alterum multiplicatus 3 Q. hoc debet esse $2\frac{1}{4}$ summæ ipsorum quæ est 4 N. ergo 9 N (bis 4 N, & quadrans è 4 N) æquantur 3 Q ergo 1 Q est 3 N; & 1 N est 3. Erit ergo maior 9, minor 3. productum 27. summa 12, cuius duplum & quadrans est 27. Sit rursum maior ad minorem triplus, & productus ex ipsis quater contineat ipsorum interuallum, eiusq; semissem. Erunt rursum numeri 3 & 9. Arbitror autem Diophantum propterea isthæc non exposuisse: quia in multiplicibus numeris hæc demonstrari non possunt, ut priora: sed duntaxat in multiplicibus superparticularibus.*

XYLANDRI.

*Breuitatis potius causa, quàm fuga minutiarũ puto Diophantũ istis indicatis potiùs quàm prolixè explicatis acquieuisse. Ne rudis quicquã iure desideret: duo proponam problemata. Dentur duo in quincupla ratione numeri, quorum productum ad summam sit duplum. Hi ergo sunt $2\frac{2}{5}$ & 12. Item sit numerorum ratio $3\frac{2}{3}$. producti ad interuallum $2\frac{1}{2}$. Erunt numeri $\frac{10}{11}$ & $\frac{10}{3}$. interuallum $\frac{100}{33}$, per $2\frac{1}{2}$ multiplicatum $\frac{200}{33}$ tantũ fit etiã $\frac{10}{11}$ in $\frac{10}{3}$ multiplicatis. Adderem formas operationum, si ignauis scriberem. In Græco autoris fœdum erat mendum inculcatum ἀπ' αὐτῶν pro ἐπ' αὐτῶν. cum hoc productũ numeri in alterũ, illud quadratum utriusq; notet. Sed res, & scholij integritas nos facilè expediuerunt.*

ἐπ' αὐτῶν, ἀπ' αὐτῶν.

XXXIIX. Inueniantur duo numeri datæ rationis, ita ut minoris quadratus ad maiorem habeat quæ requiritur rationem. Statuamus maiorem minoris triplum: quadratum minoris ad maiorem numerum esse rationis sescuplæ. Esto minor iterũ 1 N, utiq; maior erit 3 N. Quadratum minoris 1 Q debet sescuplum esse ad numerũ maiorem. Ergo 1 Q sescuplum est ad 3 N. proinde 18 N æquantur 1 Q. & 1 N est 18: minor scilicet: ac maior 54. qui satisfaciunt proposito.

SCHOLION.

Proinde 18 N.) *id est minus sumtum sexies, æquabitur maiori. nam sexies 3 N fiunt 18 N. & Q de 1 N. est 1 Q. æqualis nimirum 18 N. omnium nomina unitate deprimantur, erunt 18 æquales 1 N. ergo minor.*

*nor, 1 N, est 18: & maior, 3 N, est 54. & est 324, quadratus minoris, sesquiplus ad 54, puta maiorem.*

XXXIX. Da duos numeros rationis quæ imperatur, ut minoris quadratum ad ipsum minorem habeat eam quæ posciturrationem. Esto maior minoris triplus: & quadratus minoris ad minorem, sesquiplus. Erit rursum maior 3 N, minor 1 N, manente quæ imperatur ratione. restat ut minoris quadratum, 1 Q, sit sesquiplum minoris, qui est 1 N. ergo 6 N æquantur 1 Q. est minor 6, maior 18. & satisfit proposito.

SCHOLION.

*Maior 18. minor 6: ratio tripla. quadratus minoris ad ipsum minorem, sesquiplus: 36 ad 6.*

XYLANDRI.

*Canones fabricari heic est faciliùs, quàm ut me moniturem res poscat. plura etiam exempla quiuis suo Marte facilimè finget. quæ etiam de sequentibus uolo accipi propositionibus.*

XL. Postulantur duo numeri certam habentes rationem, ut minoris quadratus ad summam numerorum, datam rationem habeat. Esto maior minoris triplus: & quadratus minoris ad summam numerorum duplus. Erunt denuò maior 3 N, minor 1 N. Minoris quadratus, 1 Q, duplus debet esse summæ, quæ est 4 N. proinde 8 N æquantur 1 Q. & 1 N est 8. minor scilicet: ergo maior 24. Ii soluunt quæstionem.

SCHOLION.

*Maior 24. minor 8. ratio tripla. 64 est quadratus minoris, duplus summæ numerorum 32.*

XLI. Inuenire duos numeros certæ rationis, quorum minoris quadratus ad numerorum interuallum sit in data ratione. Maior sit minoris triplus: quadratus minoris ad numerorum interuallum rationem obtineat sesquiplã. Erit maior 3 N, minor 1 N. restat ut 1 Q, minoris quadratus, ad interuallum numerorũ, quod est 2 N, sit sesquiplus. ergo 1 Q. sesquiplus ad 2 N, æquabitur 12 N. & 1 N est 12, minor: maior 36. & satisfit proposito.

SCHOLION.

*Numeri 36 & 12, triplus maior minoris. ipsorum interuallum 24. & 144, quadratus minoris, ad hoc sesquiplus.*

XLII. Iisdẽ rationibus inuenientur duo numeri datæ rationis, ita ut maioris quadratus ad minorem numerum ea sit, quæ petitur, ratione, rursumq; duo numeri datæ rationis, ut quadratus maioris ad ipsum maiorem sit ea quam lubet ratione. itẽ duo numeri datæ rationis, ut maioris quadratus ad summam numerorum rationẽ obtineat datam. deniq; duo numeri datæ rationis, ut maioris quadratus ad numerorum interuallum datam habeat rationem.

SCHOLION.

*Porismatis seu appendicis huius partes ita habent. Maior 6, minor 2: ratio tripla. quadratus maioris 36 ad minorem octodecuplus. Rursum maior 6, minor 2: ratio tripla. 36. quadratus maioris ad ipsum 6 sesquplus. Item maior 12, minor 4: ratio tripla. Maioris quadratus 144. summæ numerorum, quæ est 16, nouencuplus. Deniq; maior 6, minor 2, ratio tripla. quadratus maioris 36, ad 4 interuallum numerorum nouencuplus.*

XLIII. Datis duobus numeris, tertius est inueniendus, ut de his porrò tribus binis in unum conflatis, & in reliquum multiplicatis, tres producantur numeri, æqualibus se incrementis superantes. Duo numeri sunto 3 & 5: & quæratur tertius, ut deinde bini loco unius in reliquum multiplicati, producant numeros quorum æqualia sint interualla. Qui quæritur, esto 1 N. Is adiunctus ad 5, fit 1 N † 5, sic deinde multiplicatus in reliquum, qui est 3, facit 3 N † 15. Rursus 1 N & 3, sunt 1 N † 3. quod in reliquum, puta 5, multiplicatum, facit 5 N † 15. Deniq; si coniungantur 3 & 5, conficitur 8. hic in 1 N ductus, facit 8 N. Enimuerò 3 N † 15 non esse trium productorum maximum, liquet. omnino enim eum superat hic, 5 N † 15. Ergo 3 N † 15 aut minimus est productorum, aut medius. ac 5 N † 15 aut maximus est productorum, aut medius. Maximus, medius, aut minimus esse potest 8 N: quia nondum constat quot unitates conficiant 1 N. Ponamus primò maximum esse 5 N † 15; minimum 3 N † 15. mediũ 8 N. Iam si tres numeri sese æqualibus superent interuallis, duplum medij faciunt

 coniuncti

coniuncti maximus & minimus. Hic uerò summa extremorum est 8 N † 30. medius 8 N ergo 8 N † 30 æquantur 16 N. & fit 1 N, $\frac{15}{4}$ unitatis; seu 3 & dodrans. Tantus est qui quæritur, & satisfacit postulatis propositi. Iam uerò statuamus maximum esse 5 N † 15, medium 3 N † 15, minimum 8 N. Atqui si tres numeri æqualibus se interuallis subsequantur: quanto superat maximus medium, tãto & medius minimum. Sed heic maximi supra medium excessus est 2 N: medij supra minimum 15 —— 5 N. hæc ergo sunt æqualia. & 1 N erit $\frac{15}{7}$, seu $2\frac{1}{7}$ tantus est quæsitus, & quæstioni satisfacit. Deniq; maximum statuamus 8 N, medium 5 N † 15, minimum 3 N † 15. Rursus cum extremorum summa sit duplum medij; 11 N † 15 æquabunt 10 N † 30. & 1 N est 15. Ergo 15 est numerus qui quæritur, & implet postulata.

## SCHOLION.

Variæ solutiones, inuēta æquatione.

*Tripliciter hoc demonstrat propter 8 N; quia cùm nondum liqueat quantus sit Numerus; 8 Numeri maximus, minimus, aut medius quæsitorum esse potest: ideò diuersum ei in singulis locum adsignat demonstrationibus. medium in prima, minimum in secunda, maximum in tertia faciens. Ita autem inuenitur eius quantitas. Cum 8 N & 30 æquentur 16 N: si de similibus abijciantur similia, relinquuntur 8 N & 30 æqualia. Partire 30 per 8, inuenies $3\frac{6}{8}$. aut, si etiam 3 in quadrantes solues, ut omnia sub eandem reducantur speciem, fient $\frac{15}{4}$. & abiecta denominatione partium, 15 integra. Cùm ergo maximus sit 5 N † 15, hoc est $33\frac{3}{4}$: hæc in quadrantes resoluta, fiunt 135. Medius, 8 N, id est 30, resolutus in quadrantes, fit 120. eademq; ratione minimus 105. horum est idem interuallũ, scilicet 15. In secunda demonstratione fit 1 N ualor $\frac{15}{7}$: hac de causa. Cùm 15 —— 5 N æquentur 2 N: adiecto utrinq; defectu, erunt 15 æquales 7 N. & partitio ostendet 1 N esse $2\frac{1}{7}$. Hoc totum, etiam 2 in septimas resolutis, & nomine fractionis abiecto, fit 15. Maximus ergo erit $25\frac{5}{7}$, uel omnibus in septimas partes resolutis 180 septimarum. Medius $21\frac{3}{7}$, hoc est 150 septimarum. Minimus $17\frac{1}{7}$, hoc est 120 septimarum. In tertia 1 N est 15. Nam cùm 15 N † 15 æquētur 30 N. undiq; abiectis æqualibus, 1 N fit 15. reliqua manifesta sunt.*

## XYLANDRI.

*Nam maximus fit 120, medius, 90, minimus sex. De causa fracta in integros uertendi suprà monuimus. Cæterùm hæc quæstio tripliciter soluitur, ut multa alia. cuius rei causa est, quod non exprimitur tertius ille, quem quærere iuberis, maior ne, an minor datis extremis, an uerò medio*
*loco ijs interuenire debeat, itemq; producta eorũ. In textu quæ margini erant allita,*
*in contextum retuli, De arithmetica progressionis proprietate. cuihic*
*innititur autor, nihil attinet monere hoc loco.*

DIOPHAN-

# DIOPHANTI RERVM ARITHMETICARVM LIBER SECVNDVS.

*Guilielmo Xylandro interprete.*

DEntur duo numeri, quorum summa ad summam quadratorum ab ijs procreatorum habeat eam quæ poscitur rationem. Sit quadratorum summa ad numerorum summam decupla. Statuatur minor 1 N maior 2 N. summa 3 N. quadratorū summa 5 Q. horum decima pars sunt 3 N. ergo 30 N æquantur 5 Q. erit 1 N, 6. minor quæsitorum. maior 12. hiq; postulatis satisfaciunt. Propositio I.

II. Inueniendi sunt duo numeri, quorum interuallum ad quadratorū interuallū ab ipsis ortorum sit in ea quæ præcipitur ratione. Sit numerorū interuallū sextans interualli quadratorum. Ponemus minorem 1 N, maiorem 2 N. interuallum numerorum 1 N, quadratorum 3 Q. ergo 1 N sextans est de 3 Q. itaq; 6 N æquantur 3 Q. & 1 N fit 2. ergo minor est 2, maior 4. & faciunt id quod iubemur.

III. Dentur duo numeri, ut ex multiplicatiōe alterutrius in alterū productus ad summam uel interuallum numerorum habeat rationem præscriptam. Esto productus summæ sescuplus. Ponamus eos qui quæruntur 1 N & 2 N. (Cæterùm possunt etiam in quauis data proportione poni) erit productus 2 Q. summa numerorum 3 N. Ergo 2 Q sescuplum sunt ad 3 N. itaq; 18 N æquantur 2 Q. deprimantur notæ unitate, 18 æquabuntur 2 N. ergo 1 N 9. duo ergo quæsiti numeri, & satisfacientes postulatis, 9 & 18. Quod si productū interualli sescuplum esse præscribatur, erat rursum productus 2 Q. interuallum 1 N. & 6 N æquales 2 Q. & 1 N 3. Ergo 3 & 6 numeri sunt qui quærebantur.

IV. Postulantur duo numeri, quorū interualli ad summam ab ipsis ortorū quadratorum sit quæ præscribitur ratio. Esto summa quadratorum ad interuallum numerorum decupla. Statuamus alterum 1 N, alterum 2 N. summa quadratorū 5 Q. interuallū 1 N. Oportet 5 Q decuplum esse ad 1 N. ergo 10 N æquantur 5 Q. est 1 N, 2. & quæsiti sunt 2 ac 4.

V. Petuntur duo numeri ea conditione, ut quadratorū ex ipsis natorū interuallum ad summam numerorum ea sit, quæ præscribitur, ratione. Sit interuallum quadratorū ad summam numerorū sescuplū. Rursum quæsiti ponantur 1 N & 2 N. quadratorum interuallum 3 Q, summa numerorum 3 N. Oportebit 3 Q esse sescuplum ad 3 N. ergo 18 N æquantur 3 Q. fit 1 N, 6. alter 12. Euidensq; est demonstratio.

SCHOLION.

*Quinq; hæ quæstiones uidentur eædem esse cum quinq; priore libro expositis. prima scilicet eadem cum trigesimaprima primi: secunda cū eiusdem xxxiv, tertia cum xxvij, & xxx, (est enim duplex) quarta cum xxxij, quinta cū xxxiij. Sunt aūt hæ illis imperfectiores non in illis idem, quod heic, quærebatur: & præterea etiam ratio numerorum qui quærebantur: quod heic nequaquā fit. & ex illis hæ sunt notæ. Ponit in his omnib. 1 N & 2 N: idq; nihil interest, quacunq; ratione numeri, modò inæquales, constituantur. Semper enim satisfit quæstioni.*

XYLANDRI.

*Latiùs ergo patent hæ quæstiones, & quauis innumeras admittit solutiones: quod in tertia quæstione autor non dissimulauit. & depressio characterū eis accidit, quod & ipsum ibi indicaui. Exēplis facilius est hæc illustrare, quàm ut nostra requiratur heic opera. Semel admonitus, semper intelligas uelim, me mēda Græci textus oīa nō sustulisse: sed id tibi ex uersiōe nostra faciēdū mādasse.*

VI. Quærunrur duo numeri, dato eorum interuallo, quorū quadrati quod habēt interuallū, superet numerorū interuallū quāto postulatur numero. Oportet aūt interualli numerorū quadratū minorē esse summa quę colligitur ex ipso hoc interuallo, & numero postulato. Esto numerorū interuallū 2, & numerus quo quadratorū interuallū interuallo numerorū præstat, 20. Sit minor 1 N, maior erit 1 N † 2, manēte interuallo 2. Quadratorū interuallū 4 N † 4. atq; hoc 20 est ultra interuallū 2. ergo æqualia 4 N † 4 & 22. & fit 1 N, 4 $\frac{1}{2}$ minor quæsitorū: maior 6 $\frac{1}{2}$. & satisfaciunt q̄stioni.

VII. Habēdi sunt duo numeri, ea lege, ut interuallū quadratorū ab ijs procreatorū, pręstet interuallo numerorū numero eo quod rationē interuallorū explicat, & insup dato numero. Ponamus interuallorū rationē esse triplā, ac pręterea habere 10. Heic oportet

portet quadratũ interualli numerorũ, minorẽ esse summa quæ ex triplo huius interualli, & ex unitatibus decem colligitur, quæ dantur. Detur autem numerorum ipsorum interuallum 2. Erit itaq; minor 1 N, maior 1 N † 2. Ergo 4 N † 4 (quadratorũ interuallũ) triplũ erit ad 2, & habebit præterea 10. Ergo ter 2, & 10, hoc est 16, æquantur 4 N † 4. fit 1 N, 3. hic est minor, maior 5. & faciunt, quæ postulabantur.

S C H O L I O N.

*Determinationes sextæ & septimæ quæstionis rectè habent. In sexto interualli 2 quadratus (4) minor debet esse summa quæ colligitur ex hoc interuallo & postulato numero 20. summa 22. quibus minor est 4. In septima quadratus interualli numerorum (4) minor debet esse coniunctis triplo interualli (6) & dato numero 10. summa 16. Si æqualis ponatur quadratus ille summæ dictæ utrauis in quæstione: non stabit res: ut sæpe iam diximus. multo minus, si maior.*

X Y L A N D R I.

*Aliud exemplum sextæ. Dentur duo numeri, alter alteri numero 4 præstans, ita ut quadratorum interuallum numerorum iam dictum interuallum superet 68. Numeri erunt 1 N & 1 N † 4. quadrati 1 Q & 1 Q † 8 N † 16. ergo horũ interuallum 8 N † 16. Hinc si numerorum interuallum, scilicet 4, auferatur, supererũt 8 N † 12, quod æquale est 68. & utrinq; rejectis 12, 8 N ‖ 56. ergo 1 N, minor, 7. maior 11. Quod ad conditionem seu limitationem attinet, 2 (interuallum numerorum) & 68 numerus postulatus, summam conficiunt 70. at interualli dicti quadratus 16, multo est minor quam 70. Vt autem necessitatem conditionis intelligas, Quære duos numeros, 5 differentes: ut quadratorum interuallum sit 25, hoc est 20 amplius quam 5. Inuenies 25 † 10 N ‖ 25. quod est absurdum. Pone numerorum interuallum 10, & quadratorum interuallum hoc amplius 30. inuenies 100 † 20 N ‖ 40. quod est fermè absurdius. Idem de septima quæstione tuo Marte experiaris licet. Græca & Diophanti & scholiastæ sunt ualdè confusa.*

IIX. Quadratus numerus propositus, diuidatur in numeros duos quadratos. isque sit 16. Ponatur prior numerus 1 Q: ergo alter erit 16 —— 1 Q. & hunc oportebit numerum æquari uni quadrato. Fingo quadratum latus habentem Numeros quotquot uolo, deficientibus tot unitatibus, quot constat latus quadrati 16. ac sit latus quadrati 2 N —— 4, (nam latus 16, est 4.) quadratus erit 4 Q —— 16 N † 16. hoc æquabitur 16 —— 1 Q. Adijciatur utrobique defectus, & ab æqualibus æqualia auferantur, 5 Q æquabuntur 16 N. & 1 N erit $\frac{16}{5}$. Ita fiet quadratus $\frac{256}{25}$ unus. ergo alter $\frac{144}{25}$. qui coniuncti faciunt $\frac{400}{25}$. hoc est 16. cuius partes utraque est quadratus numerus.

S C H O L I O N.

*Iubet hac propositione quadratum numerum 16 diuidere in duos quadratos: cùm quidem id natura eius nõ ferat. Quidam enim quadrati diuiduntur in quadratos. alij neutiquam. Et qui diuiduntur, alij in duos, ut 25 in 16 & 9: alij in tres, ut 49 in 4, 9, 36: alij in quatuor, ut 225 in 4, 9, 16, 196. ac sic deinceps in infinitũ. Non ergo hoc dicit, 16 in duos quadratos esse partiendum, manẽte sectionis experte unitate: id enim est impossibile. & si hoc egisset, poterat quadrato 25 adscito, inq; duos quadratos diuiso, quæstionem demonstrare. Nunc autem sua fretus alacritate quemuis quadratum diuidere intendit in duos quadratos: quod, nisi in partes secta unitate, fieri nequit. Ita heic partitus est quadratum numerum 16 in duos quadratos, quorum alter 10 $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{25}$, latus habet 3 $\frac{1}{5}$, alter 5 $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{25}$, latus habet 2 $\frac{2}{5}$. qui quadrati coniuncti, 16 conficiunt. Et prior horum quia $\frac{1}{25}$ in eo exsistit, totus in uigesimas quintas resolutus, fit $\frac{256}{25}$: & latus eius in quintantes resolutum, fit $\frac{16}{5}$. Posterior eadem de causa fit $\frac{144}{25}$, latus eius $\frac{12}{5}$. Hoc enim uniuersè sciendum est, quod quadrati qui à partibus unitatis fiunt, partibus constant cognominibus partium, à quibus fiunt, quadratorum. Sicut in proposita quæstione. cum latus sit $\frac{16}{5}$, & à 5, quod est nomen partium, fiat quadratus 25: conuenienter etiam quadratus lateris est $\frac{256}{25}$. & si latus fuisset triens, nonarum partium exstitisset: si quadrans, sedecimarum: ac sic deinceps. Atq; hoc est illud. Numeri aliquota pars in numeri eiusdem eandem aliquotam partem multiplicata, aliquotam quadrati de eo numero gignit partem. est enim $\frac{1}{5}$ aliquota numeri, $\frac{1}{25}$ aliquota quadrati pars. Mirari autem nihil attinet, quòd quamuis quadratis cõiunctis rursus 16 conficiuntur: tamen latera quadratorum coniuncta maiorem constant numerum quàm sit 4, puta latus numeri 16. summa enim laterũ est 5 $\frac{3}{5}$. Omniũ enim quadratorũ in duos quadratos diuisorũ latera ex diuisione ortorũ quadratorũ cõiuncta plus cõficiunt quã sit latus diuisi: quãtumuis quadrati iũcti diuisum quadratũ restituant. Ita latus quadrati 25 est 5: quadrati ipsum cõficiẽtes 16 & 9: latera 4 & 3, quorũ summa 7, amplius aliquid q̃ 5. Enimuerò Diophãtus omnia sub unã reducere speciẽ intẽdẽs, nõ ab unitatib. & partib. quadratos facit. Sed cũ fieri nequeat ut pars ipsa per se in unitatẽ cõuertatur, unitas aũt in partes secari posit: numerorũ unitates secat in partes cognomines.*

Quadrati minutiarũ quales.

Quadratorũ, in quos quadratus diuisus est, laterũ summa maior quadrati latere.

partium

*partium in ijs inuentarum. cumq; $\frac{1}{25}$ & $\frac{1}{5}$ sese exseruerint in numeris: tota diuidit iuxta rationem numeri q primus ab unitate partes eas habet, estq; 25 atque sic quadratorum uigesimæquintæ fiunt alterius 256, alterius 144, quorum summa 400. quem numerum etiam 16 facit in uigesimasquintas sectus: cum uiciesquinquies sedecim fiant 400. Cum ergo iubet quadratum 16 diuidere in duos quadratos: nihil aliud est, ac si diceret, 400 (quadratum numeri 20 factum 16 in 25 quadratum ductis) diuide in duos quadratos: & diuideret in 256 & 144. Vel sic. Detur numerus, in quem ductus 16, quadratum procreet, qui in duos quadratos secari possit, unitate heic nullam admittente diuisionem, atque is inuenitur 25: in quem multiplicatum 16, gignit 400, quadratum numeri 20: qui 400 diuiditur in 256 quadratum lateris 16, & in 144, quadratum lateris 12. Rectè etiam hoc dicit. Fingo quadratum latus habentem, &c. Nam si positis ijsdem, fingamus quadratum fieri à 4 N —— 4. fient 17 Q æquales 32 N, & 1 N, erit 1 $\frac{15}{17}$. uel $\frac{32}{17}$. Erit ergo prior quadratus, cuius latus 1 $\frac{15}{17}$ sit, 2 $\frac{13}{17}$ & $\frac{225}{289}$. Nam 17 in se ductus 289 facit, & $\frac{32}{17}$ in se ductus, gignit $\frac{1024}{289}$. Alter quadratus sic inuenietur. cum ponatur 4 N —— 4 latus eius, & 1 N fit 1 $\frac{15}{17}$. 4 N facient 7 $\frac{9}{17}$. unde si 4 auferas, relinquetur latus $\frac{60}{17}$ seu 3 $\frac{9}{17}$. huius quadratus ergo $\frac{3600}{289}$, si $\frac{60}{17}$ in se ducas. uel 12 $\frac{3}{17}$. $\frac{81}{289}$. si 3 $\frac{9}{17}$ in se multiplices. Hi compositi quadrati, puta 2 $\frac{13}{17}$. $\frac{225}{289}$. & 12 $\frac{3}{17}$. $\frac{81}{289}$, conficiunt 16 propositum quadratum. Partium porrò quadrati 1024 & 3600 conficiunt summam $\frac{4624}{289}$. cuius latus, utpote quadrati, est $\frac{68}{17}$. Fit autem 4624 si 16 multiplices per 289, aut numeri 16 unam quamlibet unitatem in 289 partes seces. Est ergo iam 16 diuisus in alios duos quadratos numeros. Hoc autem scire oportet, quod heic loci nunquam debet quadratus effingi ex aliquo uno Numero, sed ex Numero & parte quotacunque, aut duobus, ac deinceps. Nam si ab uno numero quadratus creetur, non succedet res. rursus enim fiet numerus tantus, quantum & latus est propositi quadrati. atque ita prior quadratus idem erit cum eo qui ad diuidendum est propositus, & secundus nusquam existet: itaq; manebit quadratus noster indiuisus: quod minimè uolebamus. Præterea quod dicit de quadrato conficiendo è latere, quod sit quotcunq; tandem numerorum, demtis tot unitatibus quot habet latus numeri 16. Statutum sit 25 quadratum diuidere in duos quadratos. Is cum è 16 & 9 conficiatur: ubi ab 25 abstulero 1 Q (puta 16.) relinquuntur 9: nimirum 25 —— 1 Q. Porrò 3, latus quadrati 9, id erit, quod se ait fingere 2 N —— tot unitatibus, quot constat latus quadrati ad diuidendum propositi, latus huius 5. ergo latus quod fingitur, 2 N —— 5. Quadratum ergo sic conficietur. Cum numerus, qui 16 quadrati latus est, sit 4: nonique duo numeri erunt 8. ab his si auferas latus quadrati 25, quod est 5; omnino relinquitur 3, quod est latus quadrati 9. & 3 est 8 — 5. Rursum si auferam à 25 numerum quadratum, 9: restat 16. Huius latus non iam amplius dicemus fingi 2 N —— tot unitatibus, quot latere quadrati 25 continentur. Nam cum impar sit 3, unde 9 nascitur: ergo tres numeri, erunt 9. unde si latus quadrati 25, scilicet 5, subduxeris: superest 4, latus de 16. & est latus 16, nimirum 4, 3 N —— 5. id est, 9 —— 5. Vniuersè enim in omnib. quadratis, qui in duos quadratos diuiduntur: latus diuisi, cum latere alterutrius in quos facta est diuisio, rationem quandam habet ad alterius latus, & subtracto alterutro quadratorum qui è diuisione emergunt: latus reliqui tot erit unitatum, quot erat demto diuisi latere latus totiplex, quotuplex erat ratio: & reliqui latus cum latere diuisi ad latus ablati. Verbi gratia. E 16 & 9 constat 25, quadratus è quadratis, inq; hos diuiditur. & latus totius, puta 5, cum 3, ut latere quadrati 9; duplum fit lateri totius 16, quòd est 4. Et si auferam 16 à 25, erit latus de 9. ob duplam rationem bis latus de 16, minus latere de 25. Erit ergo 8 —— 5: quippe 3. Rursus cum latus de 25, uidelicet 5, cum 4 ut latere de 16 triplum sint 3, qui est latus 9: si auferam 9, erit latus de 16 ob triplam rationem, ter latus de 9, —— latere de 25: scilicet erit 9 — 5, id est 4. Similiter cum quadratus 169 diuidatur in 144 & 25 quadratos: & 13 latus de 169, cum 5 latere de 25, sesquiplum sit ad 12, quod est latus quadrati 144. Ergo si 144 de 169 subtraham: erit latus de 25, puta 5, ob sesquiplam rationem, sesquiplum lateris de 144, quod est 12, uidelicet 18 — latere 169, quod est 13. erit ergo quinq;. Et rursus, quandoquidem 13, latus de 169, cum 12 latere de 144, quincuplum est lateris de 25, quod est 5: si auferam 25 de 169: propter quincuplam rationem 12, ut latus de 144, erit quincuplum lateris de 25, — latere de 169, quod est 13. erit ergo 25 —— 13. id est, 12. Proinde cum quæuis laterum inuicem detur ratio, semper tamen cum defectu lateris quod habet quadratus, diuidendus: ideo dixit,* Numeros quotquot uolo, deficientibus, &c. *Ergo in exemplo de 169, sicut diximus, sublato 25, relinquitur 144 quadrati latus, quinquies tantum quantum latus 25: demto scilicet ab illo 13, qui est latus 169. Ac Diophantus quidem dixisset, Esto latus de 144, 5 N — latere de 169. nam 1 N est latus quadrati ablati, cui quadrato adsignaueramus 1 Q. Quod si dixisset diuidendum esse 169, & ab eo auferendum 1 Q: ac deinde dixisset: Esto reliqui latus, Numeri 6, 7, aut quotcunq; tandem, — latere de 169: non iam partes fuissent 144 & 25, sed aliæ. sicut suprà demonstrauimus. Quomodo autem dicit Diophantus, secundum quadratum fore 144? quia latus eius posuit 2 N —— 4: ergo 2 N erunt 6 $\frac{2}{5}$: unde ablatis 4, restant 2 $\frac{2}{5}$. & unitatibus in quintantes dissolutis, erunt hæc 12, quod est latus 144.*

Cautio de latere fingendi quadrati.

XYLANDRI.

*Præclarum est hoc problema, & raræ subtilitatis. Sed in Græco Diophanti contextu fœdum est men-*

*est mendum, cum post δυνάμεων δ μονάδων ς exciderint hac, λεῖψει ἀριθμῶν ις. Sic enim fit istud quadratum.*

2 N — 4
2 N — 4

— 8 N † 16
4 Q — 8 N

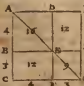
4 Q — 16 N † 16.

*& sic demum coharent qua de aquatione scribuntur. Nam cum huic quadrato aquentur 16 — 1 Q. addito utrobiq; 1 Q fit 5 Q — 16 N † 16 | | 16. & rursum additis utrobiq; 16 N, fit 5 Q † 16 | | 16 † 16 N. deniq; abyciũtur utrinq; 16. manet aquatio inter 5 Q & 16 N. seu characteribus deminutis, inter 5 N & 16. In posteriore propositione id mendi non est. Interpres porrò satis accuratè exposuit rem, ostenditq; plurimis modis diuersis satisfieri quastioni posse. Mirificè conducit hac propositio ad diametralium (quos uocant) numerorum inuentionem, quorũ scilicet quadrati coniuncti, quadratum constituant: & eorum suus est in arithmetica & geodæsia usus. Sed & scholia ipsa nonnihil explanare operapretium est. Quod ait quadratorum alios in 2, alios in 3, alios in quatuor diuidi quadratos: rectè est accipiendũ. nam profectò is, quẽ ipse in quatuor diuidit quadratos, 225: etiam in duos diuidi potest, 81 & 144. Etsi cõmentarios non scribo, attingere tamen hoc theorema lubet. Omnis quadratus numerus proximè minorem quadratum duplo radicis huius & unitate superat. Constat enim omnes quadratos colligi ex progressione numerorum imparium naturali. Sic 25 ad quadratum de 7 (49) additum, 64 facit, quadratum numeri 8. & bis 12, plus uno, id est 25, ad quadratum numeri 12, scilicet 144, adiectum, quadratum proximè maioris numeri, 13, nimirũ 169 conficit. & uice uersa, quadratum de 15 est 225. duplum 15, est 30: inde aufer 1, restat 29. quod de 225 detractum, relinquit 196, proximè minoris numeri, qui est 14, quadratum. Reliqua typus explicat. semper enim quadratus summa est omnium superiorum imparium progressionis. semperq; additur ei impar, qui duplũ est radicis eius & 1 amplius, ut fiat proximè maior quadratus. quod inuersè de subtractione intelligere in promptu est. Scire iam uelim cui nam quadrato numero quadrati aliquot propositi ita possint adyci, ut quadratus fiat qui colligitur. Summa quadratorum aut par est, aut impar. Si hoc, unitatem ei adime, reliqui semissis quadrato addes istos quadratos, habebis aliũ, scilicet proximè maiorem. Sint quadrati 81 & 196. quaro alium, cui additi, quadratum conficiunt. Summa datorum 277. uno demto, 276. semissis 138. huius quadrato 19044 adyce 277. fiet 19321 quadratus, radix 139. est ergo proximè maior. Sic 1.4.9.16.25. summam constituũt 55. & si isti quadrati omnes ad 729, qui est quadratus lateris 27, adyciantur, fiet quadratus 784 proximè maior, radicis nimirum 28. Si summa erit par, huius item semissis par. Aufer ab hoc 1, reliqui semissis quadrato si addas propositum, quadratum habebis numeri binario semissem hunc excedentis. Quadrati 16 & 36. summa 52. semissis 26, uno demto 25. Hinc aufer 1, relinquuntur 24, semissis 12. huius quadratus 144. Ei adde 52, habebis 196, quadratum numeri 16, qui 12 excedit binario. Rursum, quadrati sint 4, 16, 36, 64. summa 120. semissis 60. aufer 2, bis unum: reliqui 58 semissis 29. Eius quadratum 841. huic adde istos quadratos omnes, seu summam eorum 120, habes quadratum 961, cuius radix 31, 2 amplius quàm 29. At si paris summa semissis fuerit impar, aliter res habebit. Non enim nisi 1 adscita, aut (si id uelis) abiecta isti quadrati aly quadrato adiungentur in numeris integris. Si unitatem summa adsciscat: quadratus numeri unitate, quam est summa semissis, maioris, tota illa summa sibi ademta quadratus erit ipsius semissis. Sin amittat: quadratus unitate, quàm est semissis, minoris numeri, hoc residuo adscito, quadratus erit ipsius item*

*De quadratorum incrementis & compositione.*

| Imparium progressio. | Quadrati. | Radices. |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 3 | 4 | 2 |
| 5 | 9 | 3 |
| 7 | 16 | 4 |
| 9 | 25 | 5 |
| 11 | 36 | 6 |
| 13 | 49 | 7 |
| 15 | 64 | 8 |
| 17 | 81 | 9 |
| 19 | 100 | 10 |
| 21 | 121 | 11 |
| 23 | 144 | 12 |
| 25 | 169 | 13 |
| 27 | 196 | 14 |
| 29 | 225 | 15 |
| 31 | 256 | 16 |
| 33 | 289 | 17 |
| 35 | 324 | 18 |
| 37 | 365 | 19 |
| 39 | 400 | 20 |

*item semissis. Quadrati 4.16.25.36.49. Summa 130. semissis impar, 65. Quadratũ de 64, 4096, huic si addas 129, habebis quadratum 4225, cuius radix 65. Si quadrato 4356. cuius radix 66, adimas 131, rursum habebis quadratum semissis. Atq; hæc hic hactenus. reliqua uide infrà ad undecimam huius, & duodecimam tertij. Iam illa minutiarum in partes diuersarum denominationum diuulsio, qua Græci utuntur, & qualis ab interprete proponitur 5 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. ut habet aliquid rationis, ita plurimum obscuritatis, & multo simplicius est, adq; usum accommodatius dicere, 5 $\frac{19}{25}$. quod rectè factum est, & contra deprauationũ ansas cautè in Ptolemaicis utrisq; numeris à nostri seculi hominibus. Et in hac ipsa propositione scholiastes ineptè pro 3 $\frac{137}{289}$, posuit suo more 2 $\frac{11}{17}$. $\frac{225}{289}$. quæ enim elegantia est, aut quod compendium, partes totis subijcere quæ amplius toto sint? nam $\frac{11}{17}$ quidem & $\frac{225}{289}$ sunt $\frac{446}{289}$, quod est totum & eius partes $\frac{137}{289}$. Porrò qui attentè secundi Euclides libri propositiones quartam & septimam cognouerit: uæ is facilè intelliget, mirum non esse, quod duo numeri coniuncti maiorem summam conflant, quàm sit latus quadratorum utriusque in unum conflatorum. non enim modò mirum hoc non est, sed fieri aliter non potest: cùm complementa adhuc duo præter duo ista quadrata requirantur ad conficiendum quadratum lineæ ex utroq; latere compositæ. Quod in gratiam rudiorum etiam oculis subieci. A B est 4, B C, 3. horum quadrata A B D E 16, & E F G H 9, per quæ diameter transit A E G, ut ratio geometrica postulat. Quadratorũ summa 25. At tota A C est 7. & quadratum eius A C G K, 49. scilicet maior quàm 25. quid ita? quia ad implendum ipsum adhuc desiderant ultra 25, duo complementa B C F E & D E H K, utrunq; 12. & 24 denique atq; 25, quadratum totius A C conficiunt. Cætera satis ingeniosè scholiastes, de mutanda quæstionis enũciatione: de latere quadrati rectè instituendo. Pro 12 $\frac{1}{17}$. $\frac{82}{289}$, nos usurpamus 12 $\frac{152}{289}$. is numerus in Græco erat mutilatus. alterum iam antè exposuimus. Cæterorum fundamentum iam est propositum. & si quæ obscurius dixit scholiastes, ea exemplorum tractatio euoluit.*




IX. Rursum quadratus numerus 16 diuidendus sit in duos quadratos numeros. Esto latus alterius 1 N, alterius quotcunq; Numerorum, demtis tot unitatibus, quot unitatibus latus diuidendi constat, ac esto 2 N —— 4. Erunt quadrati 1 Q, & 4 Q + 16 —— 16 N. Horum quadratorum summam oportet esse 16. Ergo 5 Q + 16 —— 16 N æquantur 16. fit 1 N, $\frac{16}{5}$. Ergo prioris latus erit $\frac{16}{5}$, ipse quadratus $\frac{256}{25}$: posterioris latus $\frac{12}{5}$, ipse quadratus $\frac{144}{25}$: & constat demonstratio.

## XYLANDRI.

*Ad hanc nihil annotauit scholiastes, cùm idem problema paululum modò mutata operatione tractetur, cuiusmodi exempla supra non semel tractauimus. Facit autem ad expediendum eo faciliùs sequentem. Vide infrà usum lib. 4 propos. 31. & 32. Aliud exemplum subijcere libuit. Numerus 676 quadratus est, & in duobus è quibus conflatus fuit quadratos diuidendus. Hi sint 1 Q & 676 — 1 Q. Si latus ponas huius 2 N, aut 3, 4, &c. N —— 26, omnino satisfiet quæsito. Sed uidendum an in integris res possit expediri. Obseruabis ex operationibus harum duarum propositionum, quæ eòdem recidunt, eius numeri, quem N notas, quadratum unitate auctum, diuisorem fore numeri, qui omnino multiplex est ad totius quadrati latus. Ergò si 5 de latere hoc demto quadratus restet, eius latus erit numerus Numerorum, de quibus latere totius pro — subtractio, effingatur latus posterioris quadrati. Heic ergo latus fingens 5 N — 26. æquabuntur tandem 26 Q & 260 N, ac latus erit 10. cuius quadratus 100. ergo alter 576, cuius latus 24. Rursum diuidatur 225 in duos quadratos. Pono latus 2 N — 15. nam bis duo & 1 sunt 5, per quæ utiq; diuidi integrè poterit 15 & eius multiplex 60 fiunt quadrati 144 & 81. Denique 169 diuidam in duos quadratos. Latus unius 2 N — 13 in fractis rem expediet. item 3 N — 13. At si 5 N — 13 ponas (nam 13 multiplicabitur bis per numerũ Numerorum, ergo diuidi poterit per 26, qui fit quadrato quinarij unitate aucto.) 26 Q æquabuntur 130 N. & quadrata erunt 25 ac 144. Cætera diligens Lector facilè æstimabit.*

X. Datum numerum, qui est ex duob. compositus quadratis, in duos alios quadratos numeros partiri. Numerus 13 cõflatus est è quadratis duob. 4 & 9. denuò in alios eũ quadratos diuidã. Latera priorũ quadratorũ sumant 2 & 3. Ponãt iã quadra

totum,

Minutiarum Græcanica diuulsio.

torum, quos quærimus, latera 1 N † 2, & N quotlubebit, minus tot unitatibus quot unitatum fuit alterius latus, & sit posterius latus 2 N —— 3. Quadrata horum laterũ, 1 Q † 4 N † 4, & 4 Q † 9 —— 12 N. Horũ summa debuit esse 13. at est 5 Q † 13 — 8 N: id ergo æquatur 13. & fit 1 N, $\frac{8}{5}$. Iam ad postulata. Prioris latus posui 1 N † 2, id ergo est $\frac{18}{5}$. Posterioris latus 2 N, seu $\frac{16}{5}$ minus 3, quæ faciunt $\frac{13}{5}$. ergo hoc latus est $\frac{1}{5}$. Horum quadrati sunt, prioris $\frac{324}{25}$, posterioris $\frac{1}{25}$: & horum quadratorum summa $\frac{325}{25}$, quæ & conficiunt numerum 13.

## SCHOLION.

*Quadrati in quadratos diuisio gemina sine minutijs.*

*Quod ad octauam diximus propositionem, idem nunc repetimus, non omnes numeros qui ex duobus quadratis componuntur, esse ipsos etiam quadratos. & qui sunt quadrati, non statim in duos quadratos etiam secari, non diuisa unitate: exceptis paucis. Sanè 625 quadratus, latera 25, in 400 & 225 quadratos diuiditur, quorum latera 20 & 15: & alio modo in 576 & 49, quorum quadratorum latera 24 & 7. & post 625 qui sunt à latere multiplicium, lateris 25, ut à 50, 75, & 100: & deinceps. At Diophantus, præstantissimus arithmeticus, in omnes numeros quadratos & ex quadratis compositos, siue diuisioni obnoxia fiat, siue non fiat unitas, tractationem extendere cupiens, hanc quæstionem proposuit. Atq; heic quoq; iubet latera quadratorum qui quæruntur poni, alterum 1 N † 2, alterum numerorum quotquot libeat, —— tot unitatibus, quot unitatum est latus alterius. Quid uerò eum impulerit, ut sic ageret; conabimur demonstrare quàm possumus planissimè, idq; in numero, cuius tractatio unitatem relinquat integram. Propositum est quadratum 625, conflatum ex quadratis 400 & 225, denuò diuidere in quadratos 49 & 576. Horum omnium latera exponantur, ut uides: priore serie minora latera, posteriore maiora. Iam si sciam, quadratum numeri 25 conflari ex quadratis numerorum 15 & 20. ac uelim illud totum quadratum denuò diuidere in alios quadratos duos. Sic ergo ratiocinor. Esto latus alterius eorum qui quæruntur 1 N † 15 (quia 15 notus est) alterius 3 N—20, (quia etiam 20 notus erat) fiet tandem 1 N 9. & erit 1 N † 15, latus alterum 24. alterum 3 N—20 erit 7. Sic autem deprehendes 1 N esse 9. Sume mihi latera quadratorum decussatim. & quando 20 (cuius defectu latus alterum sumebatur) & 7 iuncti, constituunt 27, & 27 maximam mensuram habet 9. ideò 1 N fit 9. Et rursum quia 9 mensura illa ter inest in 27: ideò etiam 3 N, alterum latus sumebatur 3 N. sunt aũt ter 9, 27. & cùm aufertur 20, relinquuntur 7. & latera quadratorum, in quos 625 denuò diuiditur, sunt 7 & 24. Rursum si mihi constet de hoc, quadratum numeri 25 conflari è quadratis numerorum 7 & 24: uelim autem eum denuò in alios partiri quadratos. Sic dico. Quadratorum, qui quæruntur, alterius latus sit 1 N † 7 (quia 7 est notus) alterius 3 N —— 24. nam & hic est notus. Rursum latera accipio decussatim posita. 24, cuius defectu sumitur unum latus, & ei oppositus 15, constant 39. huius maxima mensura est 13. ergo 1 N erit 13. & quia 13 in 39 inest 3: alterum latus & prius latus est 1 N † 7: hoc est 20. alterum 3 N —— 24, erit 39 —— 24, id est 15. Ergo quæsitorum quadratorum latera sunt 20 & 15. Consentaneum ergo est, quod ob has causas quod latus prioris quæsitorum quadratorum 1 N ponit & tot unitatum, quot continentur minoris lateris numero: posterioris totidem numerorũ, quot & in superiore quæstione, minus tot unitatibus, quot insunt in maioris lateris numero. Fitq; id latus, quod numerũ lateris minoris adsciscit, maius: à quo aufertur maioris, minus. Quod autem $\frac{325}{25}$ cōficiunt 13, id sic fit. Quando 1 N fit $\frac{8}{5}$ seu 1 $\frac{3}{5}$: & latus prioris ponebatur 1 N † 2, erit ergo 3 $\frac{3}{5}$ uel $\frac{18}{5}$. quadratum eius (ut à 3 $\frac{3}{5}$.) 12. $\frac{3}{5}$. $\frac{9}{25}$. uel (ut ab $\frac{18}{5}$) $\frac{324}{25}$. Porrò cùm alterius latus posuerimus 2 N—3, id erit 3 $\frac{1}{5}$—3, hoc est $\frac{1}{5}$: & quadratus eius $\frac{1}{25}$, qui ad alterum adiectus, conficit $\frac{325}{25}$, quæ ad numeros reducta, 13 restituunt, numerum ab initio propositum. Is ergo 13 constabat è quadratis 4 & 9, & diuisus est denuò in alios quadratos 12. $\frac{3}{5}$. $\frac{9}{25}$. (12 $\frac{24}{25}$.) & $\frac{1}{25}$. Et 325 cōpositus 100, quod est quater 25, ac 225, quod est nouies 25: denuò diuisus est in $\frac{324}{25}$ & $\frac{1}{25}$, maiore etiam quadrato in partes uigesimoquintas diuiso.*

| 7 | 24 |
|---|---|
| 15 | 20 |

## XYLANDRI.

*Quod de multiplicibus dicit scholiastes, sic habet. 50 est ad 25 duplus. ab eius quadrato, 2500. auferto quadratum de 40. quod est duplum ad 20, restat 900, quadratum de 30, qui est duplus ad 15. Sed ponam rem sub oculos, eo lubentius, quia deprauata sunt codicis Græci uocabula.*

| | | |
|---|---|---|
| 2500. | 50. | 25. |
| 1600. | 40. | 20 |
| 900 | 30 | 15 |

*Dupla.*

| | |
|---|---|
| 5625 | 75. |
| 3600 | 60. |
| 2025 | 45 |

*tripla.*

| | |
|---|---|
| 10000 | 100. |
| 6400 | 80 |
| 3600 | 60 |

*quadrupla.*

*Et de altera item diuisione in 49 & 576. latera 7 & 24.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2500 | 50 | 25 | 5625 | 75 | | 10000 | 100 |
| 196 | 14 | 7 | 441 | 21 | | 784 | 28 |
| 2304 | 48 | 24 | 5184 | 48 | | 9216 | 96 |
| | dupla. | | | tripla. | | | quadrupla. |

*Cæterùm in reliquo scholiasten probare non possum: qui utitur τῇ κύκλῳ δείξει, quæ nihil abest à petitione principij circulatio, ut in analytica doctrina utraq; commonstrauit Aristoteles. Certè enim nisi aliũde scias longissimum latus triãguli maximo angulo subduci, quàm quia angulus maximus lõgissimo opponitur lateri: neutrum quidem scis. Quin & hoc mali accedit, quod longè aliud est soluta quæstione experiri ut omnia postulatis satisfaciant: & aliud quæstione proposita soluendi rationem indagare neq; enim omniũ per omnia quæstionum similis est statim tractatio, etiam in argumento non dissimili. atq; adeò in hac ipsa re. Fateor enim cognitis te omnib. numeris potuisse cogitare pro inueniendis quadratis posteriorib. latera ponenda fuisse 1 N † 15 & 3 N —— 20. Sed quid si 625 in 400 & 225 scio quadratos diuidi: alteros 49 & 576 quare, penitus ignotos? ubi erit ille χιασμὸς ad quem prouocatur? nisi fortè artis est ex ignoto notum demonstrare, & calceus non ad pedem, sed ad calceum pes est concinnandus. Heic ergo scholiastæ acumen desidero, & lapsum eum credo ἀναλυτικῶν ἀπαιδευσίᾳ, quod alicubi de ueterib. philosophis uerè pronunciauit Aristoteles. Nam huiusmodi δείξεις non lapidem ad normã, sed normam ad lapidem exigunt; secus quã res flagitat, & uetus prouerbium sapienter monet. Atq; adeò in promtu est hæc omnia refellere. nam si posterioris quadrati latus (quærens numeros, non præscriptos ante eos recognoscens) posuissem non 3 N —20: sed (uerbi gratia) 4 N—20. certè 1 N non esses prodituri 9, sed 8 $\frac{3}{4}$. Atq; & hoc licere, & innumeras talium quæstionũ esse solutiones, in præcedente quæstione ab ipso est scholiasta demonstratum. sicut & hoc, omisso partium nomine, quæstionem sic potuisse proponi. Numerus 325 cõflatus est è quadratis 100 & 225. quorum latera 10 & 15. eundem partiamur in alios duos quadratos. erunt hi 324 & 1. quorum latera 18 & 1. Qui volet, alias etiam solutiones facilè inueniet. satis est monuisse. Scholiasten autem reprahendendum duxi, ut monerem sui officij lectores. nam sine philosophia & analytica doctrina multi mathematica tractauerunt, ita ut & seipsos, & alios ab eorum ore pendentes deceperint. Porrò itaq; dubium non est, quin tantùm non infinita, aut etiam infinita solutiones huiusmodi problematum dari possint. Vera autem hypotheseωn in hoc argumento causa est, qđ hoc pacto fit, ut propositus numerus † ad —— comparato elidatur, nullo Algebrico charactere insignis, sed planè liber & absolutus: tandemq; in æquatione Q & N comparentur. sicut ipsa operatio abundè docet. Loco autem illius præposteri chiasmi si usurpes quæ ad præcedentem annotauimus propositionem, facilè intelliges pro secundi lateri quadrati quot N ponendi sint. Vide porrò xxij tertij infrà à nobis explicatam. ubi canonem trademus, rei ab hac quasi deriuata. Vide & exempla usumq; lib. iv. propos. xxxi. & xxxij.*

β προτ. ἀναλ. γ. 1. Euclid. 18. & 19.

Scholiastes reprahensus.

XI. Duos inuenire quadratos numeros quantocunq; iubeamur interuallo distantes. Sit iniunctum interuallum 60. Ponatur alterius latus 1 N: alterius 1 N & unitates quotuis, dummodò harum quadratarum non superet aut æquet interuallum datum. quod ideò præcipitur, ut una specie uni speciei ad extremum æquata, expediri quæstio posit. sit ergo alterius latus 1 N † 3. Erunt quadrata 1 Q & 1 Q † 6 N † 9. interuallum 6 N † 9 æquale 60. fit 1 N, 8 $\frac{1}{2}$. Ergo latus unius erit 8 $\frac{1}{2}$. alterius 11 $\frac{1}{2}$. Quadrata 72 $\frac{1}{4}$ & 132 $\frac{1}{4}$. & manifestum est satisfactum esse proposito.

XYLANDRI.

*Scholiastes heic mutus est. numeri in Græco erant uitiati. Sciendum est autem hoc quoq; problema uarias solutiones admittere pro secundi lateris positione. uerbi gratia, dẽtur duo quadrati quorũ interuallũ sit 100. Sint latera 1 N & 1 N † 2. quadrati 1 Q & 1 Q † 4 N † 4. interuallum 4 N † 4 || 100. fit 1 N 24. ergo latera sunt 24 & 26, quadrati 576 & 676. At si alterius latus posuisses 1 N † 1, aut 1 N † 3, 1 N † 4, 1 N † 9, &c. semper alios atq; alios inuenisses quadratos in fractis, optimè quidem eos proposito satisfacientes, sanè quàm iucunda uarietate quadratorum & admirabili, quod facilius est experiri, quàm ut à me exponi oporteat. Ita 25 & 625 quadrati, necnõ 361 & 961, differunt 600. Finge latus 1 N —— 10, 1 N —— 20, 1 N —— 12, &c. Si ponas 1 N —— 24, habebis quadratos $\frac{1}{4}$ & $\frac{2401}{4}$, interuallo 60 differentes. Quod ad limita-*

c tionem

*tionem attinet, cùm in autoris exemplo 60 non sit quadratus numerus, neq; huc adducari surdos attineat: mutemus exemplum, & ponamus interuallum debere esse 81. & sint latera 1 N. ac 1 N † 9. fient quadrata 1 Q ac 1 Q † 18 N † 81. interuallum 18 N † 81 || 81. ergo 18 N aquabitur nihilo. In autoris porrò exemplo, si maius latus posuissemus 1 N † 8. inuenta fuisset aquatio 16 N † 64 || 60. id est 16 N † 4 || 0. quod etiam absurdius priore erat futurum. At si posuisses alterum latus 1 N † 2, solutio integros numeros tibi exhibuisset. erat enim quadratorum interuallum 4 N † 4 || 60. & 1 N 14. Latera itaq; 14 & 16, quorum quadrati 196 & 256 omnino differunt numero 60. Caterùm hac solus citra Algebram possunt paullo negocio, si intellexisti qua ad oci auā huius commentati sumus. è quibus hunc tibi canonem depromsimus.*

CANON. Ab interuallo quadratorum dato 1 subtrahe, si impar est, reliqui semissis quadratus alter est eorum qui quæruntur: alter fit interuallo ad hunc adiecto.

*Dentur enim quadrati, quorum interuallum 57. aufer 1, residui semissis 28. quadratū 784, adde 57, fit 841. alter quadratus, cuius latus 29. Si par sit interualli numerus, & semissem parem habeat: ab hoc unitas aufertur, residuo impari respondens in ordine quadratus est alter eorum qui quaruntur, alter fit interualli numero adiecto. Ita in proposito, interuallum 60, semissis 30. quadratus impari 29 in ordine quadratorum suprà exposito respondens, id est cum eo iunctus proximè maiorem qui faciat, est 196. ergo alter 256. Quomodo inueniatur quadratus impari in serie respondens, ex suprà dictis & ipsa serie exposita liquet. Interuallo autem dato, cuius semissis sit impar, ad algebram recurrendum est, & in integris numeris solutio non inuenietur. neque canonem fabricari attinet: cùm innumeri numeri quastioni satisfaciant. Quarantur duo numeri quadrati, interuallo 42. Sint latera 1 N & 1 N † 6. Quadrati 1 Q & 1 Q † 12 N † 36. ergo 12 N † 36 || 42. hoc est 12 N aquantur 6. facit 1 N $\frac{1}{2}$. Latera itaque $\frac{1}{2}$ & 6 $\frac{1}{2}$. Quadrati $\frac{1}{4}$ & $\frac{169}{4}$. interuallum $\frac{168}{4}$. id est 42. Quod si alterum latus posuissem 1 N † 3, aquatio fuisset 6 N † 9 || 42. id est 6 N || 33. ergo 1 N est 5 $\frac{1}{2}$ alterum latus, & alterum 8 $\frac{1}{2}$. quadrata $\frac{121}{4}$ ac $\frac{289}{4}$. interuallum $\frac{168}{4}$, id est 42. &c. Quod si scholiastam imitari, & ex posteriore prius ratiocinari uelles, cū iam scias in Dio. quadratorum quasitorum latera esse 14 & 16. scilicet alterum laterum posuisses 1 N † 2, ut aquatio fieret 4 N † 4 || 60. hoc est 4 N || 56. & latus minus 14 fieret, maius 16. Sed hoc cuius artis sit, liquet hoc tamē obseruabis, Ex operationis ductu te moneri, ut circūspicias quot unitates ad 1 N adijcias pro altero latere, siquidē integros desideres numeros, & haberi ij possint. alioqui ad rem nihil refert. Vsum uide huius propositionis lib. iy. propos. xy. ac xix. & libro v. propos. 1. 2.*

XII. Datis duobus numeris, unum eundemq; numerum addere, itaq; utrunq; quadratum efficere. Sint numeri 2 & 3, & qui addendus est 1 N. Erit ergo alter 1 N † 2, alter 1 N † 3, uterque æqualis quadrato numero alicui. Hoc genus uocatur duplicata æqualitas. æquatur autem sic. Interuallo conspecto, quęre duos numeros quorū unius in alterum multiplicatio istud internallum producat. Sunt autem heic 4 & $\frac{1}{4}$. horum uel interualli semissis in se ductus minori æquatur, uel summæ semissis in se ductus æquatur maiori. Semissis excessus in se ipsum, facit $\frac{225}{64}$. huic ęquatur minor, 1 N † 2. fit 1 N, $\frac{97}{64}$. Summæ semissis in se, est $\frac{289}{64}$: huic æquatur maior 1 N † 3. fitque rursum numerus $\frac{97}{64}$. ergo numerus qui additur, est $\frac{97}{64}$. & manifestū propositum. Ne autem in hanc duplicatam æqualitatem incidamus, sic agendum. Inueniendus est numerus qui & ad 2, & ad 3 adiectus, quadratum faciat utrumq;. Quæro priùs numerum, qui ad 2 adiunctus, quadratum faciat: aut quis numerus adsumpto 3 fiat quadratus. Id autem quiuis faciet quadratus, à quo 2 aut 3 subtraxeris. Agamus de 2. is auferatur ab 1 Q. superest 1 Q —— 2: estq; euidens, huic si adijciatur 2, fore quadratum. restat ut etiam 3 adiecto fiat quadratus. at 3 ad 1 Q —— 2 adiecto, fit 1 Q † 1. hoc ergo æquatur quadrato. Hoc quadratum fingo ab 1 N —— tot unitatibus, ut substātia quadrati earum superet ipsas antè positas defectus unitates, ut heic sunt 2. Sic enim rursum ab utraque parte una species uni speciei æqualis relinquetur. Sit latus 1 N —— 4. Ergo quadratum 1 Q † 16 —— 8 N. æquatur autem hoc 1 Q † 1, addito utrique defectu, & demtis æqualibus, 8 N æquantur 15. & fit 1 N, $\frac{15}{8}$. ergo iuxta præscriptū propositi pergentibus, numerus qui datorum utrique additus eum facit quadratum, est $\frac{97}{64}$.

SCHOLION.

SCHOLION.

Hoc genus uocatur duplicata æqualitas.] *Nam in reliquis quæstionibus simplex fuit æqualitas, per quam Numeri quantitas inuenitur. hic autem duplex est. Prius enim interualli semissis, quo interuallo alter alterum excedebat numerorum sic positorum, in se multiplicatus, minori æquatur: & summæ deinde numerorum semissis in se ductus, maiori æquatur. Id quomodo fiat, hinc sciri potest. Si duo sint inæquales numeri: summæ ipsorum semissis quadratum tanto numero superabit quadratum semissis interualli ipsorum: quantus est is qui uno in alterũ ducto numero producitur. Sint pro exemplo numeri duo 8 & 4. quorum summa 12, eius semissis 6, atque huius quadratum 36. Interuallum 4, semissis 2. huius quadratum 4. At 36 quã 4 amplius est unitatib. 32. quantum fit ex ipsorum numerorum alterius in alterum multiplicatione. Hoc est idipsum, quod propositio quinta libri secundi elementorum demonstrat. Hoc nunc inuerse usurpans Diophantus: Quando (inquit) interuallũ inter 1 N † 3 & 1 N † 2 est unitas: & hanc conficiunt 4 & $\frac{1}{4}$ alterius in alterum multiplicatione: ergo quadratus semissis de eo, quod 4 præstat quadranti, æquatur minori: & de semissi summæ numerorum natus quadratus æquatur maiori. Quod perinde habet, ac si nos inuerso ordine suprà à nobis propositi exempli dixissemus. Cùm 36 præstent 4 unitatib. 32: & 32 fiat 8 in 4 ducto: ergo semissis interualli quẽ gignit quadratum, puta 4, æquatur minori. Rursus semissis summæ datorum numerorũ quem dat quadratũ, nimirũ 36, eius latus & semissis interualli, æquãtur maiori. Enimuerò interuallum inter 4 & $\frac{1}{4}$ est 3 $\frac{3}{4}$, seu $\frac{15}{4}$, unitatibus in quadrantes dissolutis. horũ semissis $\frac{7}{4}$ & $\frac{1}{8}$, hoc est $\frac{15}{8}$. huius quadratum $\frac{225}{64}$. atque hoc æquatur 1 N † 2. Deinde summæ quæ cõstat ex 4 & $\frac{1}{4}$, puta 2 $\frac{1}{8}$, semissis est $\frac{8}{4}$. $\frac{1}{8}$. scilicet $\frac{17}{8}$. hinc fit quadratus $\frac{289}{64}$: is æquatur maiori, qui est 1 N † 3. Quod autem 1 N fit $\frac{97}{64}$, sic habet. Cùm 1 in sexagesimasquartas dissipetur partes: si à $\frac{225}{64}$ auferas, utpote æqualib. 1 N † 2, 2 integra, quippe $\frac{128}{64}$: relinquentur $\frac{97}{64}$. Itidem si à $\frac{289}{64}$, quibus 1 N † 3 æquatur, auferas 3 integra, hoc est $\frac{192}{64}$, relinquuntur iterum $\frac{97}{64}$. Hæc ergo 97 addita ad 128, quadratum 225 conficiunt: ad 192 addita, quadratum 289. 128 numerum 2, 192 numerum 3 repræsentantibus. Hoc loco quæritur, cùm interuallum inter datos numeros 2 & 3 fuerit unitas: cur eos quorum multiplicatione 1 fiat, potissimum sumserit 4 & $\frac{1}{4}$. cùm quidem licuerit idem dare effectum sumtis 3 & $\frac{1}{3}$, uel 2 & $\frac{1}{2}$, &c. nam & istorum è multiplicatione oriri unitatem in aperto est. Respondeo. Si alios sumsisset numeros minores 4: interualli semissis quadratus minor erat futurus non modò quã 1 N † 2, sed etiam quã ipse 2. Itemque quadratus semissis summæ non modò non adæquasset 1 N † 3: sed ne solum 3 quidem. Quod si euenisset: non poterat à minori auferri maius, tantum abest ut sperandum etiam fuerit aliquid residui, quod ipsius numeri quantitatem expressisset. Hoc absurdi euenturum, si 3 & $\frac{1}{3}$ poneretur, è quorũ multiplicatione existeret 1, sic docebimus. Interuallum inter 3 & $\frac{1}{3}$ est duntaxat $\frac{8}{3}$. semissis $\frac{4}{3}$. huius quadratum $\frac{16}{9}$ æquabitur 1 N † 2. Rursum 3 & $\frac{1}{3}$ sunt $\frac{10}{3}$, semissis $\frac{5}{3}$, huius quadratum $\frac{25}{9}$ æquabitur 1 N † 3. Et quia ob 9 heic unitas in nonantes diuiditur: oportebit auferre à quadrato semissis interualli binarium, hoc est $\frac{18}{9}$: & à quadrato semissis summæ 3, hoc est $\frac{27}{9}$: ita ut relinquatur utrobique aliquid, quod quantitatem Numeri explicet. At quadrata ista inueneramus $\frac{16}{9}$ & $\frac{25}{9}$. & neque ab illo $\frac{18}{9}$, neque ab hoc $\frac{27}{9}$ detrahi possunt, maius de minore, nedum ad notitiam numeri perueniri. Quod etiam multo minùs locum erat habiturum, si 2 & $\frac{1}{2}$ posuissemus, quorum multiplicatione interuallum 1 crearetur. Cæterùm positis 4 & $\frac{1}{4}$, atque ulteriùs, demonstratio procedit. Enimuerò non illicò innotescit qui numeri sint sumendi, quorum multiplicatio creet interualli numerũ: (alioqui Diophãtus eius rei cõditionẽ aliquã definiuisset) sed sola id experiẽtia docet. ut heic, reiectis 3 & $\frac{1}{3}$, 4 & $\frac{1}{4}$ adsciuit. Idem etiam in posteriore demonstratione fecit, inquiens. Fingo quadratũ ab 1 N — tot unitatibus, ut substantia quadrati superet ipsas antè positas defectus unitates. ac fingit eũm ab 1 N — 4. In priore quidem demonstratione cùm 2 adesset, quadratum quoque adfirmatiuè è semisse excessus 4 supra $\frac{1}{4}$ fecit. In posteriore autem, cum desit 2, quadratum quoque à defectu 4 ducit. non autem 3. nam hinc factum quadratum, rursum erat minus futurum quàm defectus duarum unitatum. Quadratus enim ab 1 N — 3 est 1 Q † 9 — 6 N. additoque in æquatione utrique quod deerat, & æqualibus abiectis, inuenitur 1 N esse $\frac{4}{3}$. cuius quadratus $\frac{16}{9}$ non est amplius quàm 2: cùm hoc sit $\frac{18}{9}$. itaque non procedet hac uia demonstratio. Si autẽ ab 1 N — 4 fingatur quadratus, tùm inuento 1 N $\frac{15}{8}$, quadratum eius $\frac{225}{64}$ superabit binarium, cùm hic sit $\frac{128}{64}$: ille maior. Nisi enim binarium hic quadratus superabit, ut eo detracto aliquid supersit: quid erit, quæso, quod adiectum ad secundum, quadratum conficiat?*

XYLANDRI.

*Elegans est hæc quæsitio, & duplicem eius explicandæ uiam arguté commonstrauit Diophantus, fideliter & perspicuè interpretante scholiasta, cuius uerba miserè mutilata & deprauata ex re ipsa nos correximus. uel hinc sciri potest quàm miseri sint ἀγεωμέτρητοι Logistæ, & quantum usum Euclidea habeant propositiones. Cæterùm in numeris integris hoc exemplum tractare poterat autor, positis 128 & 192, quorum utrique additus 97, qui quærendus erat, quadratos 225 & 289 efficeret. Libet etiam heic canonem ponere, ut eo pleniùs intelligẽtur quæ scholiastes eruditè posuit, in eo dumtaxat allucinatus, quòd negauit certam esse legem numeros quorum*

 *multiplicatione*

Duplicata æqualitas.

*multiplicatione interuallum exsistat deligendis, cùm quinta secundi Euclidis rectè considerata eam dictet.*

CANON. Datorum numerorum interuallum uide è quib. numeris conficiat, alterius in alterum multiplicatione, ea quidem lege, ut quadratũ semissis summæ horum, maius sit maiore propositorum: uel, quod idem est, quadratum semissis interualli horum maius sit minore propositorum.

*Ab horum quadratorum priore si maiorem, uel à posteriore minorem propositorũ si auferas: relinquetur utroq; modo is qui quæritur numerus. Verbi gratia: Quæritur numerus qui ad 6 & 30 adiectus, quadratos eos faciat. Interuallum 24. quod componitur ex 12 & 2. item ex 3 & 8. item ex 6 & 4. Primùm 12 & 2 sunt 14, semissis quadratum 49. rursum 2 à 12 relinquuntur 10, cuius semissis quadratum 25. Aufer siue 30 de 49, siue 6 de 25, inuenies 19 esse numerũ quæsitum. Nam 6 & 19 sunt 25; 30 & 19 sunt 49, quadratus uterq;. Rursum 3 & 8 sunt 11. semissis quadratum $\frac{121}{4}$. hinc aufer 30, relinquitur $\frac{1}{4}$. ipse quoq; satisfaciens proposito (quem inuenisses etiam si 3 ab 8 subduxisses, residui semissis quadrato $\frac{25}{4}$, 6 ademisses.) nam $6\frac{1}{4}$ & $30\frac{1}{4}$. quadrati sunt. At si in 6 & 4 expertus fuisses, nõ successisset res. Nam 6 & 4 sunt 10. semissis quadratum 25, minus est maiore propositorum. & 4 de 6 subtractis relinquuntur 2, cuius dimidij quadratũ 1, minus est minore propositorum. Ergo duo hæc si obserues, facilè quoduis exemplum conficies. alterum, uariè idem solui propositum, pro commoda partium interuallum diuersis modis componentium diuersis modis inuentione: alterum, heic nullum numerum primum, omnes compositos æstimari. & 20 non modo ex 4 in 5, uel 2 in 10, sed etiam ex $7\frac{1}{2}$ in $2\frac{2}{3}$, aut 140 in $\frac{1}{7}$, &c. componi, prout uel nobis commodum uidebitur & colludebit, uel canonis lex requiret. Exempla alia habes lib. 3. propos. 18. 19 20, &c. iv propos. 14. 24. 35. & lib. v. propos. 1. 2. 3. & alibi. Sanè 3. & 4. quinti huius, theoremata hinc tracto inuituntur, ut illhic uidere licet. Quod ad posteriorem attinet operationem, uerba hæc Diophanti mendo non carent: ut substantia quadrati earum, &c. Non enim defectum modo superare debet hic quadratus, sed omnino etiam numerum illũ qui quadrato absolutus annectitur, cuius connexo æquale quadratum quæritur. Esto uerbi gratia quærendus numerus qui ad 3 & ad 30 additus, quadratos faciat. Pono eum esse 1 Q — 3. ut 3 addito, quadratus fiat 1 Q. Sed si 30 ad 1 Q — 3 addas, fiunt 1 Q † 27. quod æquatur quadrato. Eius ergo latus fingo 1 N — aliquot unitatibus quarũ numeri quadratus si excedat numerum 27, fiet ut utrinq; 1 Q sublato, æquatio inter N & unitates constet, absoluiq; possit. Sin uerò, nihil succedet. Ponamus enim ei latus 1 N — 5. erit quadratus eius 1 Q † 25 — 10 N æqualis 1 Q † 27. Abijce utrinq; 1 Q & 25, & adde utrobiq; 10 N. erit ergo 10 N † 2 æqualis nihilo. Quod si posuisses latus 1 N — 6, quadratus 1 Q † 36 — 12 N æquaretur 1 Q † 27. & 1 N fieret $\frac{3}{4}$. & rursus non succedit res. nam à quadrato eius $\frac{9}{16}$ non possum auferre 3, quod esset $\frac{48}{16}$. ergo 1 Q — 3, numerus quæsitus, nondum habetur. Plures ergo oportet poni unitates quæ desint 1 Numero ad latus statuendũ. Heic solertia regnat. Fingo latus 1 N — 9 (quia 27 huius est multiplex) fit 1 Q † 81 — 18 N æqualis 1 Q † 27. Abiecto 1 Q utrinq;, & addito 18 N, fit æquatio inter 54 & 18 N. ergo 1 N est 3. & 1 Q est 9. Ergo quæsitus numerus est 1 Q — 3, hoc est 6. qui satisfacit postulatis. Aliud. Detur numerus, cui si aut 14, aut 38 addas, fiat quadratus. Is esto 1 Q — 14. Adde 38, erit 1 Q † 24 æqualis quadrato. Huius latus si fingo 1 N — 5, inuenies 1 N esse $\frac{1}{10}$. Sit latus 1 N — 6, inuenies 1 N esse 1. at de neutrius horum quadrato subtrahi possunt 14. itaq; nihil dũ actum est. Sit latus 1 N — 10, erit 1 N $3\frac{4}{5}$. & 1 Q $14\frac{11}{25}$. ergo $\frac{11}{25}$ est qui quæritur. Nam ad 14 adiectus, quadratũ $14\frac{11}{25}$ facit, $\frac{361}{25}$. ad 38 autem, $\frac{961}{25}$ seu $38\frac{11}{25}$. utrunq; quadratum. Quod si latus posuisses 1 N — 12, tunc 1 N esset 5. & 1 Q 25. ergo is qui quæritur 25 — 14, hoc est 11. qui ad 14 additus, 25, ad 38, 49 facit, quadratos.*

XIII. Datis duobus numeris, ab utroq; eorum auferam unum eundemq; numerum, ut residuum utrunque sit quadratus numerus. Sint dati numeri 9 & 21. Qualemcunque uerò quadratum aufero de altero ipsorum, statuetur is quem quæritur hoc defectu. ablatus enim à numero, relinquet quadratum. Auferam ergo à 9 quadratum, scilicet 1 Q. restat 9 — 1 Q. Reliquum est, ut à 21 etiam si auferam 9 — 1 Q, quadratus supersit. at relinquitur 12 † 1 Q. hoc ergo æquale est alicui quadrato. Fingo quadratum ab 1 N — tot unitatibus, ut quadratum earũ amplius sit quàm 12. Sic enim rursum utrinque una species uni speciei æquabitur. Sit ergo latus 1 N — 4.

erit

erit quadratum 1 Q † 16 —— 8 N. idq; æquabitur 12 † 1 Q. fiet 1 N, $\frac{4}{8}$. Sunt autem 9, si resoluas, $\frac{72}{8}$, siue $\frac{576}{64}$. unde defectus 1 Q, scilicet $\frac{16}{64}$, auferatur. & satisfit proposito.

## SCHOLION.

Qualemcunq; uerò quadratum. ] *Res ita habet. Quando & 9 & 21, uterq; quadrato numero cōstat, ac 1 N. hunc si ab illis subduxero, utiq; supererunt nudi quadrati. unde liquet, si 1 Q ab altero ipsorum subtrahatur, ipsum qui quæritur numerum fore reliquum. Proinde cum inuenerimus 1 N esse $\frac{4}{8}$: & huius quadratum fit $\frac{16}{64}$: satis liquet ipsos etiam numeros debere in partes sexagesimasquartas resolui. Ergo 9 faciet $\frac{576}{64}$. & 21 faciet $\frac{1344}{64}$. Iam si à 9 aufero 1 Q, hoc est à $\frac{576}{64}$ aufero $\frac{16}{64}$: supersunt $\frac{560}{64}$, qui est quæsitus numerus. Rursum si aufero 560 à 1344, relinquuntur 784, quadratus: cuius latus 28. tantum enim est 1 Q † 12.*

## XYLANDRI.

*Obscurè & Diophātus est locutus, & interpres. Ideò, cùm quæstio sit elegans, eius faciamus aliquanto planiorem expositionem. Numerus qui quæritur, detractus de propositorum alterutro, ut heic de 9, quadratum relinquet: sequitur si quadratus, puta 1 Q, ab eodem proposito detrahatur, ipsum quæsitum numerum relictum iri. sicut si aliquis numerus ab 11 detractus dicatur relinquere 4: si 4 ab 11 aufero, 7 reliqua sunt, ipse qui desiderabatur numerus. Ergo si 1 Q à 9 aufero, residuum 9 —— 1 Q est is qui quæritur numerus: & is à 9 subtractus, relinquit utique 1 Q. Idem subtractus ab 21, relinquit 12 † 1 Q. quadratum. cuius latus ponitur 1 N —— 4. Caussa satis est explicata in præcedentibus. (Et si latus posuisset 1 N —— 3, æquata fuissent 1 Q † 9 —— 6 N, & 12 † 1 Q. æqualibusq; reiectis —— 6 N || 3. uel 3 † 6 N || 0. quod est absurdū.) fit ergo 1 N, ut autor posuit $\frac{4}{8}$, hoc est $\frac{1}{2}$. neque enim necesse est ad sexagesimasquartas partes rem deuolui. Cùm autem 1 N sit $\frac{1}{2}$, & eius quadratū sit $\frac{1}{4}$, erit 9 —— 1 N, numerus quæsitus 9 —— $\frac{1}{4}$, hoc est 8 $\frac{3}{4}$ seu $\frac{35}{4}$ (siue $\frac{560}{64}$, ut habet Diophantus.) Is detractus de 9, relinquit $\frac{1}{4}$. de 21, 12 $\frac{1}{4}$. sunt autem $\frac{1}{4}$ & $\frac{49}{4}$ quadrati. Si omisso partium nomine libeat in integris quæstionem proponere: Dantur numeri 36 & 84, à quorum utroq; aliquis subtractus, quadratos relinquat. Is erit 35. residua 1 & 49. Sed & manente quæstione, solutio inuenietur in integris. Nam 5 est numerus quæsitus, qui de 9 subductus, relinquit 4: de 21, 16. numeros quadratos. Hæc solutio proditur, si latus posterius ponatur 1 N —— 6. nam æquatio fit inter 1 Q † 36 —— 12 N & 12 † 1 Q. & tandem 24 || 12 N, fit 1 N, 2. quadratum 4, ergo ipse numerus 9 —— 4, hoc est 5. Persequi alias solutiones nihil attinet. sed & hic Canonem ponemus, cuius fundamenta superiore propositione sunt iacta.*

CANON. Differentiam numerorum qui sua multiplicatione conficiant numeri, uide horum summæ itemque interualli ipsorum semisses, uterque in se multiplicentur: quadrata de datis subducta, numerum quæsitum ostendent.

*Atq; heic cauendum est, ne ita constituantur numeri interuallum cōponentes, ut hæc quadrata maiora propositis exsistant numeris. Documentum. In quæstione à Diophanto proposita, numerorum interuallum 12. id fit ex 2 in 6. summa 8. semissis quadratum 16, de maiore aufer, relinquitur numerus quæsitus 5. idem inuenitur, si 2 à 6 subtrahas, residui semissem in se ducas, & hoc quadratum de minore auferas. Si 3 & 4 statuisses, eadem 8 $\frac{3}{4}$ numerum quæsitum reperisses. Aliud. Dati numeri 206 & 26. interuallum 180. Id si componas ex 2 in 90, aut 6 in 30, quadrata exsistent maiora datis, & res non succedet. si in 10 & 18, quadrata inuenies 196 & 16: & quæsitus numerus erit 10. Sic à 4 & 9 aufero eundem, ut maneant quadrati $\frac{4}{9}$ & $\frac{49}{9}$. aufertur enim 3 $\frac{5}{9}$. Atque hoc pacto nos duplicatæ æquationis rationes etiam ad hanc propositionem extendimus. quod à Diophanto, & ipso etiam scholiasta prætermissum fuisse (siquidem librarius nihil interuertit) miror. Nam posito qui quæritur 1 N, hypostases erant 9 —— 1 N & 21 —— 1 N. interuallum 12. reliqua patent.*

XIV. Ab eodem numero duos datos auferemus, ita ut residuum utrunque sit numerus quadratus. Sint auferendi 6 & 7. Qui quæritur, sit 1 N. ab hoc aufero 6, restat 1 N —— 6, æqualis quadrato. Ab eodem si aufero 7, restat 1 N —— 7, æqualis quadrato. In hoc casu rursum duplicata æqualitas exsistit. Ergo cùm horum interuallum 1 componatur 2 in $\frac{1}{2}$ multiplicato, numerus tandem inuenitur $\frac{121}{16}$, qui satisfacit postulato. Ne uerò in duplicatam excidamus æqualitatem, sic indagabimus. Quæremus initiò numerum, à quo 6 subtractus ubi fuerit, relinquatur qua-

 dratus,

dratus. is nimirum est quadratus aliquis, si ei adijciatur 6. nimirum ergo is quem uolumus, est 1 Q † 6. nam hinc ablatis 6, relinquitur 1 Q. Necessariò autem etiam 7 detracto de 1 Q † 6 relinquetur quadratus. at relinquitur 1 Q —— 1: quod æquetur alicui quadrato. Fingamus quadratum à latere 1 N —— 2, is erit 1 Q † 4 —— 4 N, qui æquatur 1 Q —— 1. fit 1 N, $\frac{5}{4}$. Ergo is quem quærebamus, est $\frac{121}{16}$: & satisfacit proposito.

## SCHOLION.

*Eadem est huius, quæ fuit duodecimæ propositionis methodus. Cæterùm $\frac{121}{16}$, numerus à quo subtracti cùm 6 tum 7, relinquant uterq; quadratum, sic inuenitur. 1 N —— 7 una unitate superatur ab 1 N —— 6. Hoc interuallum fit numeri in alterum multiplicatione, ut dicta propositione est explicatum. numeri hi sunt 2 & $\frac{1}{2}$. horũ interuallum $\frac{3}{2}$. semissis huius $\frac{3}{4}$: quadratum $\frac{9}{16}$ æquale minori, scilicet 1 N —— 7. Summa eorum $\frac{5}{2}$. semissis $\frac{5}{4}$. huius quadratum $\frac{25}{16}$, æquatur maiori, qui est 1 N —— 6. Quando igitur in sedecimas partes unitas scinditur: si ad $\frac{9}{16}$ adijcio defectum 7 unitatum, fient $\frac{121}{16}$. unde si auferam $\frac{112}{16}$, relinquuntur $\frac{9}{16}$ numerus quadratus. Si uero ad $\frac{25}{16}$ adijcio defectum 6 unitatum, rursum fient $\frac{121}{16}$, unde si auferam $\frac{96}{16}$, relinquentur $\frac{25}{16}$ quadratus. Ita ergo inuentus est numerus 121, unde si demas 112, relinquitur 9 quadratus: si 96, superest 25 quadratus & ipse. Numeros autem qui sua multiplicatione 1 conficerẽt, sumsit hic 2 & $\frac{1}{2}$, non (ut in duodecima) 4 & $\frac{1}{4}$. nam & istis, & deinceps maioribus res procedit: in minoribus autem non potest demonstrari: uerbi gratia, si semel 1 posuisset. nam & sic 1 conficitur: & excessus 1 supra 1 inueniri non potest. Porrò, inquit, si 6 adijcio alicui quadrato: liquet reliquum rursus futurum quadratum, si de hac summa sex abijcio. Atqui necesse est ut præterea ab 1 Q † 6 si auferam 7, relinquatur quadratus. relinquitur autem 1 Q —— 1. quod oporteat esse quadratum. Eius ergo latus fingit 1 N —— 2, quia progreditur ab unitate. fit quadratus 1 Q † 4 —— 4 N, quod æquetur 1 Q —— 1. addito utrinq; defectu fiunt 1 Q † 5 æquale 1 Q † 4 N. & abiectis utrinq; æqualibus, 5 æquatur 4 N. fit 1 N $\frac{5}{4}$, & 1 Q $\frac{25}{16}$. & quem quærebamus $\frac{121}{16}$. Nam si ab 121 auferas 96, restat quadratus 25. si uerò ab 121, ut 1 Q † 6, auferas 7, id est septies 16, seu 112, restat 9 quadratus.*

## XYLANDRI.

*Idem hoc in integris potuit proponi. Detur numerus, à quo si 96, & 112 auferas, residui sint quadrati. Is numerus inuenietur 121. In Diophanteo $\frac{121}{16}$, quia erat 1 N † 6. & 1 N, $\frac{25}{16}$, ad quem si 6 addas, scilicet $\frac{96}{16}$, fiunt $\frac{121}{16}$. Autor duplicem solutionis rationem proposuit. nos canonem adijciemus, in quo memineris ualere cautionẽ canonis ad duodecimã propositi. Quæratur numerus, à quo si 41 & 65 auferam, relinquantur duo quadrati.*

CANON. Interuallum numerorum multiplicatione sua alterius in alterum numeros conficientes quære. horum numerorum summę semissem, semissem item interualli ipsorum, utrunque in se multiplica. Minus quadratum maiori datorum, maius minori adijce, res erit confecta.

*Hic interuallum est 24. quod componunt 3 in 8, uel 4 in 6, uel 2 in 12. sed priores bini rem nõ expedient, quod expediendo senties. Cæterùm 2. & 12, sunt 14, semissis 7, quadratus 49. hunc adde minori datorum, utpote maiorem, ac quadratum semissis summa, inuenies 90, numerum quæsitum. Eundem inuenies, si semissem interualli inter 12 & 2, utpote 5, in se ducas, & quadratum 25 maiori 65 adijcias. Per Algebram sic. Ponamus quæsitum esse 1 Q † 41. nam utique quadratus erit si 41 abijciat. Aufer ab eo 65, restat 1 Q —— 24. æqualis quadrato. Latus huius fingo 1 N —— quotcunque unitatibus. nam utrobique 1 Q abijcietur, & N æquabuntur liberæ unitates semper, quod ex operatione animaduertes. Sit 1 N —— 2. quadratus 1 Q † 4 —— 4 N. æquantur 4 N & 28. fit 1 N 7. 1 Q, 49. ergo quæsitus 49 † 41, hoc est 90. Si latus posuisses 1 N —— 6, inuenisses quæsitum 66, qui & ipse & infiniti alij satisfaciunt quæsito, de quo admonendum te duxi. Sic si 100 & 60 uelis subducere ab aliquo eadem conditione, inuenies eum esse uel 109 uel 181. interuallo datorum 40 ut componentes ipsum 4 per 10, & 2 per 20, diuiso. nam si 5 & 8 adsumas, frustraberis. Vides amplitudinis quintæ secundi specimen. Per Algebram licet plures solutiones ipse conquiras.*

XV. Datum numerum in duos partire, & inueni præterea quadratum, qui istarum cum partium utraque quadratum conficiat. Diuidendus sit 20 in duos numeros, qui sic ponendi sunt, ut quadrati eorum non excedant diuidendum, ac sint 2 & 3. Quorum utrique si adijcias 1 N, erunt quadrata eorum 1 Q † 4 N † 4. & 1 Q † 6 N † 9.

N † 9. Vnde si utrinq; quadratum abijciam, scilicet 1 Q, relinquentur 4 N † 4 & 6 N † 9: qui sunt partes quas quærimus: ac nimirùm utraque adscito quadrato, quadratam summam conficit. Proinde 4 N † 4, & 6 N † 9 summam cùm conficiant 10 N † 13, ea æquabitur 20. aufer utrinque æqualia: erit 1 N, $\frac{7}{10}$. Ergo partes diuisi erunt $\frac{68}{10}$, & $\frac{132}{10}$, & sufficiunt quæstioni explicandæ.

## SCHOLION.

Ergo partes diuisi erũt $\frac{68}{10}$ & $\frac{132}{10}$.) *Hoc est $\frac{680}{100}$ & $\frac{1320}{100}$. quæ & sic fiunt. Cùm 1 N sit $\frac{7}{10}$, erit 1 Q. $\frac{49}{100}$. diuiditur ergo unitas in centesimas particulas. Et cùm post detractionem quadrati prior sit factus 4 N + 4, hoc est $\frac{28}{10}$ & $\frac{40}{10}$, seu in uniuersum $\frac{68}{10}$ * etiam $\frac{132}{10}$ in centesimas mutari oportebit: quod fit, decimis decuplatis. ita ergo fiunt $\frac{680}{100}$ & $\frac{1320}{100}$: quorum utriq; adiectus $\frac{49}{100}$ facit $\frac{729}{100}$, & $\frac{1369}{100}$ quadratos. Latus illius $\frac{27}{10}$, huius $\frac{37}{10}$. Sed $\frac{680}{100}$ & $\frac{1320}{100}$ summam conficiunt 20, scilicet $\frac{2000}{100}$, quantis unitate scissa in centesimas. Datus ergo est numerus 2000, in duos diuisus 680 & 1320, quorum uterq; adscito quadrato 49 fit quadratus, ille 729, hic 1369. Sed & latera quadratorum sunt ficticia illa, 1 N + 2, id est $\frac{27}{10}$, & 1 N + 3, id est $\frac{37}{10}$. è quibus dicti quadrati fiunt.*

## XYLANDRI.

Qui sic ponendi sunt, ut quadrati eorum.) *Hoc fit propter æquationis inuentionem. Nam si posuisses 4 & 5. quadrata obtigissent 1 Q † 8 N † 16 & 1 Q † 10 N † 25. & utrinq; abiecto 1 Q, 8 N † 16 & 10 N † 25, fieret horum summa 18 N † 41 æqualis 20. quod est absurdum admodum. Scholion autem heic est mutilum, ubi asteriscum alleui. operatio ipsa subtilis admodũ, & Diophanto digna: quam analysi explicare possis, hoc ferè modo. Quadratus partibus numeri diuisi adiungendus optimè ponitur 1 Q, cuius latus sit 1 N. Is quadratus, si aliter institueres positiones, quàm heic instituuntur, utrinq; subduci ita, ut ad æquationem explicabilem perueniretur, non potest. itaq; arguté factum est, quod ex tali multiplicatione procreatæ sunt partes propositi numeri, ut 1 Q (cuius rei causa 1 N ad 2 & ad 3 est adiectus, & ex istorum utriusq; in se multiplicatione omnino quadratus erat exstiturus, cuius utrinq; pars esset 1 Q) de utroque tolli posset, itaq; duæ tantùm, ut noster uocat, species committerentur; N uidelicet & absolutæ unitates. Hinc discere possunt studiosi, quid exercitatio faciat: utq; sibi mathematici causas non effectuum sed scientiæ ipsi fabricentur. Ergo cùm 1 N sit $\frac{7}{10}$: & nos posuerimus numerum quadratum partibus addẽdum, esse 1 Q, is erit $\frac{49}{100}$. Iam cur partes sint $\frac{68}{10}$ & $\frac{132}{10}$, quarum summa $\frac{200}{10}$, id est 20: sic disces. prior fuit 4 N † 4. at 4 N conficiunt $\frac{28}{10}$, & 4 sunt $\frac{40}{10}$, summa $\frac{68}{10}$. eodem modo inuenitur posterior. Sed in centesimas resolui oportet, si ueritatem solutionis perspicere cupias. Addi enim $\frac{49}{100}$, quadratus quem opus nobis suggessit, ad $\frac{68}{10}$ aut $\frac{132}{10}$ non potest, nisi his quoque in centesimas mutatis quod fit denominatore per 10 (cum 10 decies fiat 100) multiplicato. Reliqua sunt manifesta: & in integris hoc ut tractetur & proponatur numeris, scholiastes indicauit. Nisi partes initio operis ponas in integris, ut heic 3 & 2, in magnos labyrinthos minutiarum incides. itaq; hæc quidem quæstio plures una solutiones admittet: sed commodè duas tantum, 1 & 3, uel 1 & 2 positis partibus. quod moneo, quia ad multos tales numeros inueniendos conducit. nam quanto maior est propositus numerus, tanto plures partibus constituendis positiones sumere licet, quarum quadratorum summa numerum ipsum non æquet, ut si esset 84 diuidendus hâc conditione, poni possent 9 & 1, 8 & 3, 8 & 4, 7 & 5, 7 & 4. &c. Quæ omnia exemplis docere uelle, est abutentis suo ocio, & de lectorum industria diffidentis.*

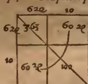
XVI. Datum numerum diuidemus in duos numeros, ac porrò exhibebimus quadratum, à quo uterque horum detractus, residuos faciant quadratos. Numerus diuidendus iterum esto 20. & quadratus à nobis exhibendus fiat à latere 1 N ac tot unitatibus, quarum quadratus non superet 20. Sit ergo latus hoc 1 N + 2, erit Quadratus 1 Q + 4 N + 4. Est autẽ euidens, quod hinc abiectis 4 N † 4, remanebit 1 Q, quadratus: & si auferres ab eodem 2 N † 3, relinquetur 1 Q † 2 N † 1, quadratus & ipse. Quæ cùm sint: pono alterum numerorum, in quos propositus diuiditur, esse 4 N † 4. & alterum 2 N † 3. quadratum autem quem quærimus, 1 Q † 4 N † 4: à quo utrum partium diuidendi subtraxeris, relinquetur quadratus. Restat ut hi duo diuisum æquent. at summa ipsorum est 6 N † 7, cui æquatur 20. & utrinq; sublatis æqualibus, fit 1 N, $\frac{13}{6}$. Erit ergo altera partium $\frac{76}{6}$, altera $\frac{44}{6}$. quadratus ipse $\frac{625}{36}$. & satisfit postulatis quæstionis.

## SCHOLION.

*Omnis quadratus à Numeris quotcunq; & unitatibus quotcunq; ortus: siue omnes qui fiunt Numeros, omnesq; natas unitates amittat, quadratus ipse remanet: siue abijciat cognominem unitatibus Numerorum ab initio positorum partem, & totidem unitates, quot continentur numero cognomine partis quæ est de Numeris subtractorum ad reliquum: & unitatib. insuper ijs quæ ab initio fuerant positæ. Clarius hoc erit ex hac expositione. Sit latus hoc, 2 N † 2. statuamusq; 1 N esse 2. erit ergo Quadratus, 4 Q, hoc est 16: & 8. N, hoc est itidem 16, & 4. summa omnium 36. haud aliter quàm si summā 2 N & 2, scilicet 6, in se multiplicasses. Iste ergo quadratus, si ei 8 N, id est 16, & 4 insuper detrahas, manebit 16, quadratus. Quod si idem 36, amisisset 4 N, scilicet 8, & 3, hoc est 11; retinuisset sanè 25, quadratum. Sunt autem 4 N ex 8 N pars eiusdem nominis cum 2 ab initio positis, scilicet semissis. At 3 æquantur cognomini numero partis quanta est Numerorum subtractorum ad reliquum. (sunt autem æqualia, quod unitate notatur.) & insuper 2 quod ab initio ponebatur. nam 2 & 1 sunt 3. Rursum latus sit 3 N † 5, & 1 N sit 2. Quadratus fit 9 Q † 30 N † 25, hoc est 36, 60, 25. simul in summa 121. Heic si uniuersos 30 N, seu 60, & 25 insuper abijciam, relinquentur 36 quadratus. Quod si partem 5 unitatibus cognominem de 30 N, scilicet quintantem, seu 6 N, qui faciunt 12, auferam: & præterea tot unitates, quot sunt in cognomine numero partium numerorum ablatorum ad eos qui relicti sunt, ac tot insuper unitates quot initio positæ fuerant: ( cæterùm Numeri subducti ad reliquos quadrans sunt: & initio ponebantur 5 unitates.) ergo si auferam 12, 4, & 5 de 121: rursum superest quadratus 100. Sic ergo etiam heic egit Diophantus. Cùm enim posuerit quadratum qui quæritur esse 1 Q † 4 N † 4, à latere 1 N † 2. & inuentus sit 1 N esse $\frac{13}{6}$: erit utiq; latus 1 N † 2, scilicet $\frac{25}{6}$, & eius quadratus $\frac{625}{36}$. atq; huius summa colligitur ex 1 Q, quod est $\frac{169}{36}$, & 4 N, quod est $\frac{312}{36}$, & 4, quod est $\frac{144}{36}$. Horum summa 625. Vnde si auferas 4 N † 4, hoc est 312 & 144, scilicet 456: relinquitur 169 quadratus, latus habens 13. Quòd si à 625 subducas 2 N † 3, scilicet 156, & 108, summam 264: superest 361 quadratus, latus habens 19. Porrò 264 & 456 sunt in summa 720, nimirum 20, unitate quauis in 36 particulas diuisa. Ergo 720 diuisus est in duos 264 & 456, qui si uterq; à 625 subducantur, relinquunt quadratum.*

## XYLANDRI.

*Adfine est hoc superiori problema, & limitationis adiecta causa, & positionū, inde repetatur. Theorema aūt scholiastæ & mendosum est in Græco, & perplexè propositū. Ad priorē partē quod attinet, nihil est obscuritatis. Nā posito latere 6 N † 10, quadratus fit 36 Q † 120 N † 100 neq; dubium est, quin huius quadrati cōstitutio si exigatur ad quartam secundi, 120 N † 100 sint gnomon, duob. cōstans cōplementis & quadrato: ut ex adiecto schemate cernere licet. Altera pars ita habet. A 10 denominatur pars decima, $\frac{1}{10}$. Ea de 120 N, est 12 N, quib. ablatis restāt 108 N. ratio ablati ad reliquū est nonencupla: nomē 9. unitates initio positæ 10. Ergo si auferā à dicto quadrato 12 N † 19. relinquetur quadratus 36 Q † 108 N † 81. Quod nō modò radice pro arbitrio æstimata experiri licet, sed etiam inuentione radicis quadrati huius. est autem ea, 6 N † 9. Vt uides.*




ra- 36 Q + 108 N + 81 / 6 N + 9 / 12 N dix.

*Esto, propter rudiores, 1 N 10. Erit latus 6 N † 10, 70. quadratus inde factus 4900. Et tantundem est etiam 36 Q. 120 N, 100. scilicet 3600. 1200. 100. summa 4900. At 12 N sunt 120; quæ & 19, id est 139, si auferas de 4900, relinquuntur 4761 quadratus, à radice 69. sed & 36 Q. (3600) cùm 108 N (1080.) & 81, summā faciunt 4761. & 6 N, sunt 60: quib. addita nouē, 69 planissimè reddunt. Enimuerò ut subtile est hoc theorema, ideoq; à nobis demonstratū exhibeu hac: ita alia causa est cur 2 N † 3 poni possint. Nā Cardanus & Stifelius sagaciter perniderūt hos numeros 1 Q † 2 N † 1, 1 Q Q † 2 C † 3 Q † 2 N † 1 quadratos esse non minus, quàm hos, 121, 12321, & similes sicut etiā quadrati sunt 10404, 90601, 10609, 40401, & alij id genus. Vide etiā lib. 3. prop. 16. Ergo sicut 1 Q † 4 N † 4 abiecto toto gnomone fit 1 Q, nimirū quadratus: ita etiā 2 N † 3 abiectis fit 1 Q † 2 N † 1, qui & ipse quadratus est. quod silētio prætereundū minimè duxi. Reliqua è superiore propositiōe possunt intelligi. Id uerò minimè dissimulandū est, uariè solui hoc quoq; genus quæstionis posse. Nam latus quadrati licuit etiam 1 N † 3 ponere. etiam 1 N † 4. ne de infinitis minutijs mentionem faciam, quæ inter 2 & 5 intercidunt. (Nota 1 N † 5 nō potuisse poni, quia quadratus de 5, puta 25, maior esset 20, diuidendo numero. Quadratus fieret 1 Q † 10 N † 25. & si iam pro altera partium poneres 10 N † 25, maior ea ipso toto diuidendo perabsurdè statueretur.)*

*retur.) Rursus quadrati latera posito 1 N † 3, quadratum fit 1 Q † 6 N † 9. Si pro altera parte statuamus 6 N † 9. pro reliqua 4 N † 8, aut 2 N † 5, perinde est utrum ponas. quod multo adhuc magis uariabitur, si 1 N † 4 quadrati latus ponas. Multo magis, si diuidendus numerus maior sit, & plures lateris positiones admittat. Quæ ego indicanda duxi, non etiam stylo persequenda, quod exercitationis ansam dedisse in santa fecunditate satis haberem.*

XVIII. Inueniantur duo numeri quorum sit quæ præcipitur inter se ratio: & uterque cum quadrato qui proponitur coniunctus, quadratum numerum conficiat. Esto maior triplus minoris, & uterque adiecto nouem fiat quadratus. Heic à quocunque quadrato, cuius latus sit 1 N † aliquot unitates, 9 aufero; is numerus alter quæsitorum erit. Esto minor 1 Q † 6 N, erit maior 3 Q † 18 N. restat ut ad hunc quoque adiecto 9, fiat quadratus. At fit 3 Q † 18 N † 9. hoc ergo æquale est quadrato. Fingo quadrati latus 2 N ——— 3. erit 1 N, 30. Ergo minor numerus est 1080. maior 3240, quorum uterq; si addas ei 9, est quadratus.

SCHOLION.

*Quòd quadratum effingit à latere, in quo est defectus, hanc habet rationem. 3 Q † 18 N † 9. non nascitur ab uno Numero: alioqui enim esset 1 Q duntaxat, cùm sint heic tria: ideò latus ponit 2 N cum defectu tali, ut Quadrati superent, Numeri autem deficiant, & unitates æquentur quantitate. sic enim unitates uniuersæ hinc submotæ, uniuersas illinc submouebunt: & Quadrati de Quadratis auferentur, ut Quadratus supersit certæ Numerorum multitudini æqualis. Ergo addito utrobiq; defectu, & æqualibus amputatis, deminuentur notæ numerorum, fietq; 1 N, 30, 1 Q autem 900. Ergo minor, cum sit 1 Q & 6 N, erit 1080. maior 3 Q † 18 N, 3240. Et 9 ad 1080 adiecta, quadratum faciunt 1089, cuius latus 33. ad 3240, quadratum 3249, cuius latus 57. Et 33 sunt 1 N † 3, latus quadrati 1 Q † 6 N † 9. 57 autem sunt 2 N ——— 3, latus quadrati 4 Q † 9 ——— 12 N Sunt autem 4 Q † 9, 3609. unde si auferas 12 N, hoc est 360. relinquentur 3249.*

XYLANDRI.

*In positione hoc obseruabis facilè, inueniri posse numerum qui cum 9 sit quadratus: idq; quadratũ habere pro latere 1 N, & tot unitates, quot unitatibus radix quadrati propositi constat. heic 3, cùm quadratum sit 9. Ergo 1 N † 3 in se ductum facit 1 Q † 6 N † 9. Ergo alter numerorum est 1 Q † 6 N. ad quem 9 si addas, utique quadratum habebis. Hunc minorem esse, placuit autori. nam si maiorem statuisset, minor $\frac{1}{3}$ Q † 2 N fuisset (supersedere autem minutijs interdum licet, cùm scilicet non plus compendij in ijs est quam in integris.) Nunc maior est 3 Q † 18 N. & 3 Q † 18 N † 9, quadratus. Heic cum uideas tres species, Q, N, & absolutum numerum 9, elegantis est industria ita instituere ratiocinationem, ut in æquatione harum una prorsus elisa, reliqua comparentur quo facit ——— 3, quis 9 procreat, quæ 9 ab altera parte aboleant. & quia defutura sunt radices in nouo quadrato, quod multiplicationis doctrina patefit: ideo ponuntur radices in latere tot, ut in quadrato recens efficto sint plures Q quam 3 Q, qui erant in priore. Quia concisè hæc sunt ab autore dicta, æquationem sic subijciamus in gratiam discentium.*

Fictio lateris pro quadrato.

*2 N ——— 3 latus effingendi quadrati.*
*2 N ——— 3*

*——— 6 N † 9*
*4 Q ——— 6 N*

*4 Q ——— 12 N † 9 quadratum, æquale quadrato 3 Q † 18 N † 9. Primùm ab utraq; parte abijcio 9. deinde 12 N utriq; parti addo, & utriq; 3 Q adimo. fiunt 30 N æquales 1 Q, hoc est, nominum facta, ut monuit interpres, deminutione, 1 N est 30. Cætera habes in scholio. Sed obiter memineris, heic quoq; uarias solutiones dari. nam quotquot ultra 2 posueris radices ——— 3. res aliter atq; aliter succedet. quod unico exemplo docere satis est. Sit latus effingendi quadrati 3 N ——— 3. erit quadratus 9 Q ——— 18 N † 9. æqualis 3 Q † 18 N † 9. æquatione cõposita, 1 N est 6. numeri 72 & 216. utriq; additus 9 facit 81 & 225. quos quadratos esse nemo ignorat. Ita si quæras duos duplæ proportionis numeros, quorũ utriq; 25 additus quadratos faciat: eñ alios inuenies, tum 600 & 1200, latere posito 2 N ——— 5, &c. Per duplicationem æquationem hac non nisi perplexitate magna se obijcientes fieri posse, experiendo senties.*

XIIX.

XIIX. Dentur tres numeri; quorum si quisq; proximè ipsum insequenti portionem sui quanta imperatur tribuat, & præterea aliquot ex præscripto unitates: omnes illi ultro citroq; datis & acceptis quæ mandatum fuerat, æquales exsistant. Esto hæc lex problematis, ut primus sui quintantē & 6 secundo: secundus sui sextantem & 7 tertio: tertius sui septantem & octo tribuat primo. Ponamus primum numerum esse 5 N, secundum 6 N. Dat primus secundo 1 N † 6. Ita secundus erit 7 N † 6. Iam si secundus eius quod ante accesſionem hanc habebat sextantem, & 7, scilicet 1 N † 7, dederit tertio: iam nunc habebit hac facta accesſione 6 N — 1. Cæterùm primus retinuerat dato sui quintante & 6, adhuc 4 N — 6. Ergo primus, si à tertio accipiat huius septantem & 8, habere debet 6 N — 1. ad hoc autem ei desunt 2 N † 5. Ergo 2 N † 5 sunt septans tertij, & insuper 8. ergo si eis 8 adimas: 2 N — 3 erunt septans tertij. is ergo est 14 N — 21. Restat ut hic quoq;, si primo dederit septantem sui & 8, ac deinde à secundo receperit sextantem eius & 7, fiat 6 N — 1. Atqui tertius amisso sui septante & 8, retinet 12 N — 26. & ubi à secundo ei accesſerint 1 N (sextans huius) ac 7, habebit 13 N — 19. quod æquatur 6 N — 1. fit ergo 1 N, $\frac{18}{7}$. Ergo primus erit $\frac{90}{7}$, secundus $\frac{108}{7}$, tertius $\frac{105}{7}$. Atque hi implent conditiones propositi.

## SCHOLION.

De tertio inquit, Amisso sui septante, & octo, reliquam ei est 12 N — 26.) *id sic fit. Septans eius 14 N — 21. Erat 2 N — 3. quem ubi primo dedit, retinet 12 N — 18. sed & 8 præterea dedit. Ergo supersunt ei 12 N — 26. nam — 8 ad — 18 accedens, defectum fecit 26. Tertius porrò* $\frac{105}{7}$ *fit hoc pacto 14 N sunt* $\frac{252}{7}$. *hinc aufer quod illis deerat, scilicet 21, seu* $\frac{147}{7}$: *relinquuntur* $\frac{105}{7}$. *Primus ergo dans secundo sui quintantem, hoc est* $\frac{18}{7}$, *& præterea 6, seu* $\frac{42}{7}$. *retinet adhuc* $\frac{30}{7}$. *Idem à tertio eius septantem* $\frac{15}{7}$, *& 8 seu* $\frac{56}{7}$ *recipiens, consit* $\frac{101}{7}$. *Secundus ubi sui sextantem* $\frac{18}{7}$ *& porrò 7 seu* $\frac{49}{7}$ *tertio dedit, retinet* $\frac{41}{7}$. *Post ubi à primo recepit eius quintantem* $\frac{18}{7}$ *& 6, id est* $\frac{42}{7}$, *summam habet* $\frac{101}{7}$. *sed & tertius dans primo sui septantem* $\frac{15}{7}$ *& 8, seu* $\frac{56}{7}$, *retinet* $\frac{34}{7}$. *ubi uerò à secundo eius sextantem* $\frac{18}{7}$ *& 7 seu* $\frac{49}{7}$ *recepit,* $\frac{101}{7}$ *summam habet.*

## XYLANDRI.

*Ipsa quæstio monet, cur primo 5 N, secūdo 6 N tribuātur, quia scilicet tota eorū partes requiruntur. & hæ positiones cùm ad minutias, tum ad secundas radices euitandas sunt accommodatæ. Memineris autem quæ de dando & accipiendo postulantur, ad sortes numerorum, non ad summas quæ ex additamentis fiunt, referri. ut etiam in sequenti. In Græco confuse quæ dicebantur, meliore ordine & planius exposui, mendis expunctis.*

XIX. Datus numerus in tres diuidatur, quorum quisq; proximè sequenti ubi dederit sui partem quæ imperatur, & aliquot item unitates: datis acceptisq; ut mandatum fuit omnibus, æquales diuisi partes exsistant. Hoc pacto diuidendus sit numerus 80, in tres alios, ut primus sui quintatem ac 6 secundo: secundus sui sextantem & 7 tertio: tertius sui septantem & 8 primo det: itaq; ultro citroq; datis & acceptis ex præscripto omnibus, æqualitas exsistat. Statuemus primum 5 N, secundum 12. Ergo secundus, ubi quintantem primi ac 6 acceperit, erit 1 N † 18. Verùm hic secundus, puta 12, ubi sui sextantem 2, & præterea 7, id est in summa 9 amiserit, dum ijs tertium impertit: retinet 3. & à primo donatus deinde 1 N † 6, habet summam 1 N † 9. Tantundem ergo reliqui etiam dato receptoq; quod imperabatur habebunt. At primo ijs quæ iam diximus expensis, restabant 4 N — 6. Vt ergo habeat 1 N † 9, desunt ei adhuc 15 — 3 N. hoc ergo est septās tertij & præterea 8. quare 8 hinc sublatis, quod restat 7 — 3 N septans erit tertij. Est ergo tertius 49 — 21 N. Restat ut is det & recipiat quæ iubetur. Atqui re peracta habet summam 43 — 18 N, quæ æquatur 1 N † 9. Fit 1 N $\frac{34}{19}$. Est ergo primus $\frac{170}{19}$, secundus $\frac{228}{19}$, tertius $\frac{217}{19}$.

## SCHOLION.

*Tertius 49 — 21 N, cùm secundi sextantem, 2, & ad hæc 7, id est omnino 9 accepit, fit 58 — 21 N. Iam septans tertij 7 — 3 N & præterea 8, sunt 15 — 3 N, quæ si inde auferas, restāt 43 — 18 N. adiectio & detractio*

detractio partium in æquatione euidens est. Cæterùm primus $\frac{170}{19}$, sui quintantem $\frac{34}{19}$, & 6 seu $\frac{114}{19}$, in summa $\frac{148}{19}$, secundo dans, retinet $\frac{22}{19}$. ad quæ à tertio recipiens eius septantem $\frac{31}{19}$, & 8 seu $\frac{152}{19}$, summam $\frac{183}{19}$ habet in summa $\frac{205}{19}$. Secundus ubi sui sextantem $\frac{38}{19}$, & 7 hoc est $\frac{133}{19}$ (summam $\frac{171}{19}$.) tertio dedit, sibi reseruauit $\frac{57}{19}$. Ad hæc nactus à primo ista $\frac{148}{19}$, habet & ipse $\frac{205}{19}$. Tertius postquam sui septantem & 8, hoc est $\frac{183}{19}$ dedit primo, retinuit $\frac{34}{19}$. quibus ubi à secundo data accesserunt ista $\frac{171}{19}$, summa heic quoq; fit $\frac{205}{19}$.

## XYLANDRI.

*Valdè ingeniosæ sunt heic positiones 5 N, 12, pro primo & secundo. & omnino 12 est secundus, $\frac{228}{19}$. Cæterùm in Diophanto est, numerorum qui sic diuidi debeat, esse 80. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν π' διελεῖν. Sed profectò hi tres numeri qui sic inueniuntur, summam 80 non constant, qui propositus fuit ad diuidendum: sed conficiunt omnino $32\frac{7}{19}$. Itaq; heic quid dicam nō habeo: nisi quod 80 illud subreptitium puto. & quidem tertium, si summa trium debuit esse 80, poni debuit 80 — 12 — 5 N, hoc est 68 — 5 N, & examinari iuxta postulata quæstionū, quas noster uocat hypostases uel tertium sic, ut est, inuentus 49 — 21 N, debuit alteri tertio 68 — 5 N æquari: quod in magnum incidisset absurdum. qui enim potest maior numerus cum minori defectu, æquari minori numero cum maiori eiusdem generis defectu? & fierent sic reducta æquatione 16 N + 68 æqualia 49. Quin & hoc ostendit non 80 numerum proponi, sed simul & numerum & partes quæstioni congruentes quæri, quod 12 absolutas unitates ponit pro secūda parte, quasi uerò necesse sit secundum esse hanc, & hoc modo diuinare licuerit, certo numero ad diuidendum proposito. Certè enim si numeri 80 sic diuidendi, secunda pars est 12: eadem 12 non erit, manentibus legibus quæstionis iisdem, & alio ad diuidendum proposito. Itaq; illa 80 planè non agnosco. Et tamen nisi datur numerus diuidendus, à superiore hoc problema diuersum non erit, & disertè fit mentio dati numeri, qui sit diuidendus. Itaq; suspicari licet alio modo fuisse repetitum superius exemplum, deinde de 80 sic diuidendo propositū problema, cuius solutio exciderit, & propositio repetitionis. Certè quiduis potiùs suspicor, quam Diophantum à scopo aberrasse. Non solent autem dedita opera ad tractationem problematum deligi tales numeri, qualis est $32\frac{7}{19}$ sed integri. alias si pro π' legeres λβ, ζ ιθα. omnia conuenirent. sed quàm insolens uel deprauatio hæc fuisset, uel correctio? Nos, ne quid desit tractationi, quæstionem ut in Græco est propositam explicemus: idest, Datum numerum 80 diuidemus in tres alios, qui postulata quæstionis impleant. Principio, cùm summa numerorum non præscriberetur, nostro arbitratu licebat primum & secundum ponere qua uellemus ratione. Sicut in præcedente propositione autor primū 5 N, secundum 6 N posuit, ratione sesquiquinta. & in solutione $\frac{90}{7}$ & $\frac{108}{7}$ hanc habent rationem. At in hac propositione secundus ad primum $\frac{228}{19}$ ad $\frac{170}{19}$ nequaquam est sesquiquintus, manentibus iisdem omnino legibus quæstionis. neq; 5 N ad 12 statim habent eandem quam ad 6 N rationem: & heic quidem nequaquam habet. Quid ita? quia trium numerorum summa non est eadem, aliusq; adeò numerus diuidendus in tres partes his cōditionibus iisdem. nam decimaoctauæ quæstionis numeri faciunt $41\frac{6}{7}$, heic $32\frac{7}{19}$. sed cum nulla præscribitur summa, libertas ista permittitur. Heic à proposito pendemus numero. Difficulter hæc per secundas radices seu regulam Quantitatis fiunt. Si sapis, habes eius declinandæ occasionem. Nam cùm tres* Compēdium obseruandū *numeri qui quæruntur, 80 summam conficiant: neq; dum eorum partes adduntur detrahunturq;, huic summæ quicquam decedat; cùm quod uni aufertur, alteri adiiciatur, nihil excidat amittatur ue. intelligere licet, æqualitatem trium numerorum ultimo exsistentem eam fore, ut quinis sit triens ex 80, hoc est $26\frac{2}{3}$. Hoc animaduerso ponamus primum esse 1 N. ab eoq; auferamus quæ dat secundo, $\frac{1}{5}$ N + 6: relinquitur $\frac{4}{5}$ N — 6. hoc cum septante tertij & 8, æquabitur $26\frac{2}{3}$. Ergo à $26\frac{2}{3}$ auferas $\frac{4}{5}$ N — 6, relinquuntur $32\frac{2}{3}$ — $\frac{4}{5}$ N, quod est 8 & septans tertij. aufer 8, relinquitur septans tertij $24\frac{2}{3}$ — $\frac{4}{5}$ N. ergo tertius est $172\frac{2}{3}$ — $5\frac{3}{5}$ N. Huius & primi summa $172\frac{2}{3}$ — $4\frac{3}{5}$ detracta ab 80, utpote summa trium numerorum, relinquet scilicet secundum $4\frac{3}{5}$ N — $92\frac{2}{3}$. Huic sextantem suum & 7 adimemus, nimirum $\frac{23}{30}$ N — $7\frac{4}{9}$, relinquentur $\frac{23}{6}$ N — $85\frac{2}{9}$. His si addamus $\frac{1}{5}$ N + 6, quod ei à primo accedebat, fient $\frac{121}{30}$ N — $79\frac{2}{9}$ æqualia $26\frac{2}{3}$: ob causam suprà demonstratam. adde utrobique $79\frac{2}{9}$, erunt $\frac{121}{30}$ N || $\frac{845}{9}$ hoc est 363 N || 8630. (alterum per 30, alterum per 9 erat multiplicandum.) pro his sume minimos 10 & 3, ut alibi docui. Fit 1 N $\frac{8630}{363}$ primus. secundus $\frac{3060}{363}$. tertius ergo $\frac{17350}{363}$. quorum summa $\frac{29040}{363}$, id est 80. Cætera omnia congruere ad postulata quæstionū, experiendo deprahendes. & hoc ratiocinandi genus minimè est uulgo notum.*

*Addam*

*Addam aliud in numeris integris, ut demerear lectorem etiam rudiorem. Diuidatur 330 in tres numeros, ita ut si primus sui semissem & 10 secundo det, ac recipiat tertij quadrantem & 30: secundus sui quintantem & 6 tertio tribuat, ipse quod iam diximus à primo recipiat: tertius primo det, & à secundo recipiat quantum indicauimus: omnes sic facti numeri sint aequales. Ii sunt 100.70 & 160. quod licet experiaris. Quo consilio duae hae propositiones quadratorum tractationi interserta sint, non disputo. Certè deprauationis nomine suspectum codicem aut potiùs librarios si cui faciant, non mirer, non dissentiam ab eo.*

XX. Inueniendi sunt quadrati tres numeri, ut maximi supra medium, & medij supra minimum abundantiae ea sit quae praescribitur ratio. Esto ea tripla. Statuamus minimum 1 Q. medium 1 Q † 2 N † 1, nimirum à latere 1 N † 1. Erit ergo maximus 1 Q † 8 N † 4. hoc ergo quadrato aequale est. Eum effingo ab 1 N. ut 1 Q conficiatur latere in se ducto, & tot unitates, ad 1 N adijcio: ut quae porrò species fiunt in constituendo quadrato, non utraq; multitudine sua superet 8 N & 4, sed altera deficiat, alterum excellat. sit ergo latus 1 N † 3, erit quadratum 1 Q † 6 N † 9, aequale 1 Q † 8 N † 4. fit 1 N, 2 $\frac{1}{2}$. & quadrati quaesiti, maximus 30 $\frac{1}{4}$. minimus 6 $\frac{1}{4}$, medius 12 $\frac{1}{4}$. qui satisfaciunt quaestioni.

SCHOLION.

*Non minor modò, sed & medius poni debet quadratus: nimirum cuius latus fit 1 N, & quotquot tandem unitates. Tertium non est necesse poni quadratum, dummodo interuallum eius supra medium, rationem praescriptam habeat ad interuallum medij supra minimum. Ergo cùm medius quadratus positus sit 1 Q † 2 N † 1; rectè maximus ponitur 1 Q † 8 N † 4. Est enim interuallum medij supra minimum 2 N † 1. cuius triplum 6 N † 3 additur medio, ut maximus quadratus constituatur, triplo interuallo ad medium eius, quod est medij ad minimum. Porrò siue in maximo numerus N maior sit numero unitatum, siue minor, siue aequales sint: semper quadratum quod fingitur ita est instituendum, ut numeri Numerorum qui fiunt & unitatum, alter excedat speciem alteram, alter ab ea superetur. ac perinde est, utrum horum fiat. non enim semper idem fit.*

XYLANDRI.

*Non inuenies temerè exemplum, ubi pauciores unitates, plures N quadratum sit suggesturum. Sed cur nõ 1 Q. 4 Q. potius posuerit autor, quã 1 Q. 1 Q † 2 N † 1. in promtu est causa. illa enim uia ad aequationem explicabilem non perducit. Caeterùm hae quoq; quaestiones complures admittunt solutiones. Nam si minimum posuissem 1 Q, medium 1 Q † 6 N † 9, à latere 1 N † 3. (minutias enim prudens dissimulo.) horum differentia 6 N † 9. triplum eius ad medium adiectum, 18 N † 27, maximum quadratis facit 1 Q † 24 N † 36. Haec uarietas thesium secunda, est innumera. Latus quoq; unde maximo aequale quadratum sit effingẽdum, uariè potest poni. nam si id posuisses 1 N † 10, quadratum eius 1 Q † 20 N † 100 aequaretur 1 Q † 24 N † 36, hoc est 4 N || 64. Facit 1 N 16. numeri ergo sunt 16, 19, 26. quadrata 256. 361. 676. interualla 105 & 315, eorum ratio tripla. Si latus 1 N † 8 posuisses, inuenisses numeros $\frac{7}{2}$. $\frac{13}{2}$. $\frac{23}{2}$. quadrato omissis denominatoribus 49. 169. 529. interualla 120 & 360, tripla, &c.*

XXI. Quaeruntur duo numeri, ita ut quadratus alterius altero numero adiecto, utrinq; fiant quadrati. Pono priorem 1 N: posteriorem 2 N † 1, ut prioris quadratus hoc numero adiuncto fiat quadratus. Iam posterioris quadratum est 4 Q † 4 N † 1. & addito priore fit 4 Q † 5 N † 1, aequale quadrato. Hunc fingo à latere 2 N —— 2, & erit quadratus 4 Q † 4 —— 8 N. fit 1 N $\frac{3}{13}$, isq; est prior quaesitorum, posterior $\frac{19}{13}$: & facimus quod postulatur.

SCHOLION.

*Fingit quadratum à latere 2 N —— 2, ut à 2 N exsistant alij 4 Q: per —— 2 autem efficiat reliquas duas species, quarum altera maior, altera minor sit specie simili in quadrato ad quem aequatio instituitur. nam 4 quae fiunt, amplius sunt quam 1: & uicissim —— 8 N est minus quam 5 N. Proposito porrò sic satisfit. Prior numerus qui fit $\frac{3}{13}$, quadratũ gignit $\frac{9}{169}$ unitate in centesimas sexagesimasnonas scissa. adde huic quadrato alterum numerum $\frac{19}{13}$, scilicet (quod fit multiplicatis 19 in 13.) $\frac{247}{169}$. fiunt $\frac{256}{169}$, quadratus à latere $\frac{16}{13}$. Rursum posterior $\frac{19}{13}$, quadratum procreat $\frac{361}{169}$, cui adde $\frac{3}{13}$, id est $\frac{39}{169}$, fiunt $\frac{400}{169}$, quadratus à latere $\frac{20}{13}$.*

XYLANDRI.

*Primae positionis ratio pendet à quadrato 1 Q † 2 N † 1. Huius pars 1 Q cum habeat radicẽ, ea pro primo statuitur, reliquum pro secundo. quod ad primi quadratum adiectum, quadratum initio adsumtum restituit. Vnde liquet innumeris modis uariari posse. Verbi gratia, quadrati*

sunt

*sunt etiam hi 1 Q † 6 N † 9, & 4 Q † 24 N † 36 latera 1 N † 3 & 2 N † 4. Ergo pro priore 1 N, pro altero 6 N † 9 ponere licet: uel pro priore 2 N, pro altero 24 N † 36, &c. Reliqua interpres satis commodè explicauit: neq; instituti mei est, rem satis indicatam ubiq; subiecto opere persequi.*

XXII. Inueniantur duo numeri, ut utriusq; quadratus altero numero sibi adempto, relinquat quadratum. Ponamus minorem 1 N & quot libuerit unitatum, sitq; adeò 1 N † 1. Maior quadratus sit minoris, demto 1 Q: nimirum ut minoris quadratus maiore isto demto, maneat quadratus. Ergo cùm quadratus minoris sit 1 Q † 2 N † 1: maior erit 2 N † 1. ac si à quadrato minoris hunc auferes, relinquitur 1 Q, quadratus utique. Iam maioris quadratus 4 Q † 4 N † 1, si auferas ab eo minorem numerum, fit 4 Q † 3 N, quod nimirum sit æquale quadrato residuum. Hunc quadratum fingo à latere 3 N. fitq; 1 N $\frac{3}{5}$. Ergo minor est $\frac{8}{5}$, maior $\frac{11}{5}$. & soluunt quæstionem.

SCHOLION.

*Quadrati latus fingit 3 N, ut qui procreantur inde 9 Q amplius sint quàm 4 Q. Nā si latus posuisset 2, produxisset hoc quadratum 4 Q: & reiectis æqualibus, 3 N æquarentur nihilo, quod est absurdum. Quòd latus tantum N ponit, non adiectis unitatibus: ideò fit, quia sublato quadrato minore de maiore, relinquuntur duæ species, Q & N. nam si etiam unitates ab altera parte fuissent, etiam has heic adhibuisset. quod hoc loco necesse non fuit. Cum autem minor sit $\frac{8}{5}$, quadratus eius fit $\frac{64}{25}$, unitate in uigesimasquintas scissa. ergo maior $\frac{11}{5}$ fit $\frac{55}{25}$, quæ à $\frac{64}{25}$ subducta, relinquunt $\frac{9}{25}$ quadratum. Rursus cùm maior sit $\frac{11}{5}$, eius quadratus est $\frac{121}{25}$. minor $\frac{40}{25}$ inde ablatus, quadratum relinquit $\frac{81}{25}$.*

XYLANDRI.

*In Græco scholia sunt mutila. Has quoq; quæstiones eandem cum superioribus uarietatem positionum & solutionum admittere, satis ex dictis potes animaduertere.*

XXIII. Inueniantur duo numeri, ut utriusq; ipsorum quadratus, cum numerorum ipsorum summa, faciat quadratum. Sit minor 1 N. maior 1 N + 1: ut quadratus minoris 1 Q, cum summa amborum, quæ est 2 N + 1, faciat quadratum. Restat ut etiam maioris quadratus cum hac summa, quadratum constituat. Quadratum maioris (1 Q + 2 N + 1) cum summa numerorum (2 N + 1) fit 1 Q + 4 N + 2. hoc est æquale quadrato. Fingo hunc quadratum ab 1 N —— 2 latere. ipse ergo est 1 Q —— 4 N + 4. fit 1 N, $\frac{2}{8}$, minor. maior ergo $\frac{10}{8}$. & satisfaciunt quæstioni.

SCHOLION.

*Præclarè statuit maiorem 2 N † 1. ut quadratus minoris, 1 Q, utroq; numero adiuncto, faciat quadratum, scilicet 1 Q † 2 N † 1, cuius latus 1 N † 1. Sed & quadratum fingit è latere 1 N —— 2, ut restituatur in illo 1 Q, & species N atq; absoluti numeri quæ in altero superat, in altero superetur. Porrò cùm minor sit $\frac{2}{8}$. quadratum eius est $\frac{4}{64}$, unitate in sexagesimasquartas dissoluta. & summa numerorum, $\frac{12}{8}$, in easdem resoluta partes, quod fit 8 eos multiplicantr, fit $\frac{96}{64}$. hæc ad minoris quadratum $\frac{4}{64}$, addita, $\frac{100}{64}$ facit. Rursum quadratū maioris est $\frac{100}{64}$: ad quem summa addita, fit $\frac{196}{64}$. utrinq; quadratus.*

XYLANDRI.

*Præstat uti minimis $\frac{1}{4}$ & $\frac{5}{4}$ quod ipse facilè uides. Quæ de uarietate dixi, ubi locum habeant, etiam me tacente senties, uerbi gratia, maiorem potuisse poni 4 N † 4, 6 N † 9, &c.*

XXIV. Postulantur numeri duo, quorum utriusq; quadrato si summam ipsorum numerorum adimas, residui sint quadrati. Sit minor heic quoq; 1 N, maior 1 N + 1, ut uicissim quadratus maioris summa numerorum detracta, maneat quadratus. Ergo superest, ut etiam minoris quadratus amborum summa multatus, quadratū relinquat. Id ergo quadratum 1 Q, demtis 2 N + 1, est 1 Q —— 2 N —— 1, æquale quadrato. Id quadratū fingo à latere 1 N —— 3. Ergo 1 Q —— 6 N + 9 æquatur 1 Q —— 2 N —— 1. fit 1 N, 2 $\frac{1}{2}$ minor, maior 3 $\frac{1}{2}$. qui postulabantur.

SCHOLION.

Summa numerorum detracta maneat quadratus.) *Nimirum enim 1 Q. Ceterùm quadratum etiam à latere 1 N —— 2 poterat fingi. Porrò minoris quadratus est 6 $\frac{1}{4}$. unde si 6, summam numerorum, auferas, $\frac{1}{4}$ restat, quadratum lateris $\frac{1}{2}$. quadratus maioris 12 $\frac{1}{4}$. hinc itidem 6 ablatis, 6 $\frac{1}{4}$ quadratus relinquitur.*

XYLANDRI.

Etiam à latere 1 N —— 2.) *τὸ αὐτὸ πάλιν ἐγίνετο, ambiguè. Sed res ita habet. Fieret enim quadratum*

*dratum 1 Q + 4 — 4 N aequale 1 Q — 2 N — 1. & abiectis utrinq; 1 Q, additis utrinq; 4 N & 1, 5 aequantur 2 N. Ergo 1 N $2\frac{1}{2}$. Variabis positiones & solutiones, si lubet.*

XXV. Duos numeros inueniamus, quorum summæ quadratus cum utroque iunctus, quadratum conficiat. Heic cùm 1 Q, siue ei 3 Q, siue 8 Q adijcias, quadratũ præstet: eorum qui quæruntur alterum pono 3 Q, alterum 8 Q, & quadratum summæ, 1 Q. Et manet summæ quadratus, utrique iunctus, quadratus. Cùm autem summa numerorum sit 11 Q, quadratus summæ huius erit 121 QQ. Est autem etiã 1 Q. ergo 121 QQ æquantur 1 Q. erit itaque etiam latus lateri æquale, hoc est, 1 N æquabitur 11 Q. & deminuto utroque nomine, 11 N æquabuntur 1, fitq; 1 N $\frac{1}{11}$. Iam hoc ad propositum si accommodes, fit alter $\frac{3}{121}$, alter $\frac{8}{121}$. summæ autẽ quadratus $\frac{1}{14641}$, & satisfit quæstioni.

SCHOLION.

*Quia 1 N inuenitur $\frac{1}{11}$, ergo 1 Q erit $\frac{1}{121}$, & 1 QQ erit $\frac{1}{14641}$. Eodem modo inuenies quantitatem 3 Q & 8 Q. At 11 Q de 11 Q erit 121 QQ. hoc est $\frac{121}{14641}$. In tales partes resoluantur etiam $\frac{3}{121}$, fiunt $\frac{363}{14641}$. & $\frac{8}{121}$ fiunt $\frac{968}{14641}$. qualium partium quadratus summæ est 121. Cui si addas 363, fit 484 quadratus à 22 latere. Si 968, fit 1089, quadratus lateris 33.*

XYLANDRI.

*Constat 1 siue ad 3, siue ad 8 adijciatur, quadratum gignere. Hac autor subtili industria ad propositum aptauit, 3 Q & 8 Q pro numeris ponens, & 1 Q pro summæ quadrato, ut ad æquationem res deduci posset. Nam si numeros 3 & 8 posuisset: quanquam 1 quadratus est 1, & 1 ad 3 & ad 8 adiectus facit 4 & 9 quadratos: tamen res non sinit 1, ut summæ quadratum, æquari 121, iisdem quadrato summæ. Ergo absoluti numeri ob ambiguitatem unitatis excluduntur. Radices poni non potuerunt: quia 1 N & 3 N non faciunt quadratum. Optimè ergo positiones autoris habent.* Latus lateri.) *Hoc est principium, æqualium numerorum æquales esse radices siue latera. Latus quadrati 121 QQ est 11 Q. latus 1 Q, est 1 N. Deminutio characterum seu nominum alibi est explicata. Numeri in Diophanto corrupti erant. sunt autem qui quæruntur, quos posuimus. Nam cum 1 N sit $\frac{1}{11}$. fit 1 Q $\frac{1}{121}$. & cum minor sit positus 3 Q, erit ergo is $\frac{3}{121}$. maior 8 Q, id est $\frac{8}{121}$. horum summa est $\frac{11}{121}$ quod in se multiplicatum, quadratum facit $\frac{121}{14641}$. Ut autem intelligas postulata fieri, $\frac{3}{121}$ & $\frac{8}{121}$ etiam reducantur ad partes 14641, fient $\frac{363}{14641}$ & $\frac{968}{14641}$, omisso aliquantisper denominatore, qui utique est quadratus, cum sit 1 QQ de 11, ut ipsa operatio commonstrat: adde 363 ad 121 eius numeratorem, fit quadratus 484. ad 968 ad eius numeratorem, fit 1089 quadratus. Verùm hoc obseruandum est, propter uerba Diophanti nos sic quæstionem absoluisse. alioqui nihil attinet summam numerorum, puta $\frac{11}{121}$, in se multiplicare, & reliqua ita, ut ego & interpres fecimus, peragere. Est enim $\frac{11}{121}$, nihil aliud quàm $\frac{1}{11}$. huius ergo quadratus $\frac{1}{121}$ ad ipsos numeros $\frac{3}{121}$ & $\frac{8}{121}$ seorsim additus, $\frac{4}{121}$ & $\frac{9}{121}$ facit, utrũq; quadratum, laterum $\frac{2}{11}$ & $\frac{3}{11}$. Ergo sic abundè satisfecimus postulatis.*

XXVI. Inueniantur duo numeri, ut de quadrato summæ ipsorum, detracto utroque relinquatur quadratus. Primùm heic numerum aliquem quadratum deligo, à quo duo numeri possint auferri, ita ut quadratus utrobique supersit. Is heic sit 16, nam siue 12, siue 7 ei auferas, relinquitur quadratus. Rursum in quadratis statuo numerorum alterum 12 Q, alterum 7 Q, & summæ quadratum, 16 Q. à quo utrum subduxeris, quadratum relinquetur. Restat ut summæ quadratus æquetur 16 Q, & latus lateri, hoc est, ut æqualia sint 19 Q & 4 N. Ita 1 N fit $\frac{4}{19}$. Erit prior $\frac{192}{361}$, alter $\frac{112}{361}$. & satisfit proposito.

SCHOLION.

*Cùm summæ quadratus 361 QQ æquetur 16 Q: etiam latus lateri, 19 Q scilicet & 4 N, æquabuntur. & deminutis appellationibus, 19 N & 4 æquantur. Ergo 1 N est $\frac{4}{19}$. Erit alter numerorum, qui ponebatur 12 Q, $\frac{192}{361}$, cum 1 Q sit $\frac{16}{361}$. Alter, qui erat 7 Q, $\frac{112}{361}$. summa horum $\frac{304}{361}$. cuius quadratus $\frac{92416}{130321}$. In tales itaq; partes etiam inuenti numeri sunt resoluendi. erit maior $\frac{69312}{130321}$, minor $\frac{40432}{130321}$. Iam si à 92416 aufero 69312, relinquitur quadratus 23104, cuius latus 152. Si 40432, restat 51984, quadratus lateris 228.*

XYLANDRI.

[1] Numerum aliquem quadratum.) *Est hoc cuiusuis quadrati. nam si à 9 uel 8 uel 5 auferas, restant quadrati 1 aut 4. si à 25 uel 9 uel 16, à 36 uel 11 uel 20, &c. Itaq; uides uariandi copiã esse*

*esse in promtu. Sed unitatem rectè uitauit autor, & minimum quadratum delegit. Aequationem scholiastes rectè interpretatus est. ubi nos scripsimus,* Cùm 1 Q *fit* $\frac{50}{361}$, *in Græco est ἡ γὰρ α̃ δ[ι] τῶν ὁμοίων ἐστι μορίων ξδ perperàm, ut passim. Cæterũ heic quoq; in examine propositi nihil attinebat* $\frac{304}{361}$ *summam numerorum in se multiplicando tàm uastas excitare minutias. nã* $\frac{304}{361}$ *nihil est aliud quàm* $\frac{16}{19}$. *Cuius quadratus* $\frac{256}{361}$. *Et siue 192, siue 112 de 256 auferas, relinquetur quadratus: 64 puta aut 144. Est autem notum, per primos numeros & faciliùs & rectius institui ac perfici ratiocinationes. Quod ubi à me alibi annotatum non inueniès, re tamen ita ferente, scito me noluisse meo labore alienam fouere oscitantiam.*

XXVII. Duo numeri desiderantur, ut qui fit altero in alterum multiplicato, adscito alterutro, fiat quadratus. summa autem duorum laterum, à quibus sunt quadrata ista, numerus sit qui præscribitur. Atque hic quidem sit 6. Iam cùm duo sunt numeri, quorum uni ad quadruplum maioris desit unitas: altero in alterum multiplicató, si producto minor adijciatur, fit quadratum. Hoc cùm sit, minorem statuo 1 N, maiorem 4 N —— 1: ita multiplicato minore in maiorem, & addito minore, fit quadratus. Restat, ut producto unius in alterum si addatur maior, quadratus existat, cuius latus sit 6, —— eo quòd est minoris quadrati latus: ut summa laterum coniunctorum fiat 6, quod requirit quæstio. Productus cum maiore coniunctus facit 4 Q † 3 N —— 1. At quadratus lateris 6 —— 2 N facit 4 Q † 36 —— 24 N, fit 1 N, $\frac{37}{27}$, minor: maior, 4 N —— 1, $\frac{121}{27}$. & stat propositum.

SCHOLION.

*Lemma, quo autor utitur, tale est. Si numerus numerum toties contineat, quot sunt unitates in latere cuiuscunq; quadrati: horum numerorum alterius in alterum multiplicatio quadratum gignit. hoc est, siue sint æquales, propter 1 quæ est quadratus, hoc fiet. ut bis 2, 4: ter tria, 9. siue sint ratione quadrupla, propter 4 quadratum, ut 2 in 8, 16. 3 in 12, 36. siue sit ratio nouencupla, propter 9 quadratum. Vnde sequitur, si numerus ad numerum sit quadruplus, nouencuplus, sedecuplus, & sic deinceps, unitate tantùm deficiente una: ad id quod fit illorum multiplicatione, semel adscito minore, quadratum confici. ut bis 7, 14, cum 2, sunt 16: duabus autem deficientibus unitatibus, minore bis assumto ad productum, quadratum fiet, ut 2 in 6, 12 sunt: quibus adde bis 2, habes 16. si tres desint unitates, minor ter est adsciscendus, ac sic deinceps. Quod si numerus numeri sit quadruplus, nouencuplus, &c. & unitate amplius: minore semel subtracto de producto, quadratus habebitur. ut 2 in 9, sunt 18, deme 2, restat 16. si binario amplius, minor bis auferatur. ut bis 10 sunt 20 hinc 2 bis aufer, habebis 16. Si ternario, minor ter adimetur, ac sic deinceps. Cæterùm numerus, quem multiplicatio positorum ab autore producit, est 4 Q —— 1 N. cui si 1 N, utpote minor, addatur, fit 4 Q, quadratus uerè. cuius latus 2 N. Si autem maior adiungatur, fiunt 4 Q † 3 N —— 1. Porrò cùm minoris quadrati, scilicet 4 Q. latus sit 2 N: conuenienter latus maioris posuit 6 —— 2 N, ut laterum summa fieret 6. rectè etiam quadratum quod hinc fit, æquat maiori quadrato. Cùm autem 1 N inuenerimus esse* $\frac{37}{27}$, *quantus est minor: & maior erit* $\frac{121}{27}$. *(nam 4 N faciunt* $\frac{148}{27}$, *unde si 1, hoc est* $\frac{27}{27}$ *auferas, relinquentur* $\frac{121}{27}$.*) Præterea maior in minorem ductus, procreat* $\frac{4477}{729}$. *in tales partes etiam ipsi resoluantur numeri, erunt* $\frac{999}{729}$ *&* $\frac{3267}{729}$. *Si ergo addas 4477 & 999 (nam denominator, quem satis cõstat esse quadratum, omittitur heic, suo loco repetendus,) fit quadratus 5476, lateris 74. Si addas 4477 & 3267, fit quadratus 7744, lateris 88. summa laterum 74 & 88 est, denominatore subscripto* $\frac{162}{27}$, *hoc est 6.*

XYLANDRI.

*Nihil heic aliud annoto, quàm quòd diligentiam scholiastæ exosculor. quædam inserui perspicuitatis causa. ut & in sequentibus. ἐν τῷ τῖ ἀδικημ', ἀδικῶ, dicebat ille.*

XXIIX. Duo numeri dentur, quorum unius in alterum multiplicatione qui producitur, utroq; detracto eorum, quadratus fiat. latera autem quadratorũ summam faciant, quanta imperatur. ea sit 5. Quoniam quidem, si duo sint numeri alter alterius quadruplum unitate excedens; horum unius in alterum multiplicatione productus, detracto minore quadratus fit: ideò maiorem pono 4 N † 1, minorem 1 N. productus enim subtracto minore fit quadratus. Restat ut etiam maiore de producto sublato, reliquatur quadratus: & quadratorũ latera summam conficiant 5. At productus reciso maiore fit 4 Q —— 3 N —— 1. hoc dico æquari quadrato lateris 5 —— 2 N, qui est 4 Q † 25 —— 20 N, fit 1 N, $\frac{26}{17}$. tãtus est minor: maior $\frac{121}{17}$. & respõdẽt postulatis.

SCHOLION.

*Eadem huius, quæ præcedentis, est demonstratio. Et cùm 1 N sit* $\frac{26}{17}$. *tantus est & minor. maior 4 N † 1, id est* $\frac{121}{17}$. *nã quater* $\frac{26}{17}$ *faciunt* $\frac{104}{17}$, *quibus* $\frac{17}{17}$, *scilicet 1, adiecta,* $\frac{121}{17}$ *conficiunt. Altero in alterum multiplicato nascun*



Theorema de quadratis.

*tur* $\frac{3146}{289}$*. in tales particulas resoluti etiam inuenti numeri, fiunt* $\frac{442}{289}$ *&* $\frac{2057}{289}$*. Ergo siue 442 aufero à 3146, relinquitur quadratus 2704, cuius latus 52. siue 2057 à 3146 detraho, superest 1089 quadratus, lateris 33. Laterum deniq;* $\frac{52}{17}$ *&* $\frac{33}{17}$ *summa est* $\frac{85}{17}$*, scilicet 5.*

XXIX. Numeri duo quadrati quæruntur, quorũ è multiplicatione alterius in alterũ productus utroq; adscito quadratum constituat. Horum quadratorũ, qui quæruntur, alter sit 1 Q, alter 1, utpote quadratus. Horũ multiplicatio producit 1 Q. Is ergo adscito utroq; quadratus esse debet. resq; eò deducta est, ut quæratur quis quadratus unitate adscita fiat quadratus. Statuatur quadratus, quẽ quæro, esse productus ipsorũ, 1 Q. cui si adijciatur 1, fit 1 Q † 1, æqualis utriq; quadrato. Fingo quadratũ à latere 1 N —— 2. Is (puta 1 Q † 4 —— 4 N.) æquatur 1 Q † 1. Fit 1 N, $\frac{3}{4}$ & numeri $\frac{9}{16}$ ac $\frac{16}{16}$ à quibus productus alter in alterum, adscita unitate fit quadratus. Huic aũt producto si alter etiã addatur, oportet quadratum confici. Qui productus cũ sit $\frac{9}{16}$, nũc in quadrato omnia proponantur, id est omnia sedecupla, 9 Q † 9. hoc ergo æquatur quadrato Fingo quadratũ à latere 3 N —— 4, isq; est 9 Q † 16 —— 24 N. Fit 1 N, $\frac{7}{24}$. Ergo alter erit $\frac{324}{576}$. alter $\frac{49}{576}$. & faciunt quæ requiruntur.

S C H O L I O N.

*Latera sumuntur, ut & in XXVII fingendis quadratis, alterum 1 N —— 2, alterũ 3 N —— 4, ut Quadrati utrinq; ijdẽ inueniãtur, & reliquarũ specierũ altera superet, altera superetur. Cùm aũt 1 N inueniatur* $\frac{3}{4}$*, erit 1 Q* $\frac{9}{16}$*, & 1 erit* $\frac{16}{16}$*. producitur aũt ab ijs* $\frac{144}{256}$*, cui si 1 addas, nimirũ* $\frac{256}{256}$*, fient* $\frac{400}{256}$ *quadratus, à latere* $\frac{20}{16}$*. His ita constitutis, omnia iubet sedecies sumi. hoc est & productũ* $\frac{144}{256}$*, quod idẽ est cũ* $\frac{9}{16}$*, & quadratũ* $\frac{9}{16}$*: sic enim fiunt 9 Q † 9, cùm quiuis quadratus sit 1 unitas. Rursus cùm 1 N fiat* $\frac{7}{24}$*, utiq; quadratus erit* $\frac{49}{576}$*. & cùm alter quadratorum fuerit 9, qua omnia sedecies sumebantur, à latere* $\frac{3}{4}$*. hic quoq; alterius latus erit* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{24}{24}$*, hoc est, erit* $\frac{18}{24}$ *qui in se multiplicatus, gignit* $\frac{324}{576}$*. iam hic in* $\frac{49}{576}$ *ductus, procreat* $\frac{15876}{331776}$*. Resoluantur in tales particulas etiam inuenti numeri. fient* $\frac{28224}{331776}$ *&* $\frac{186624}{331776}$*. Omisso paulisper denominatore, adde 28224 ad 15876, fiet 44100 quadratus, à latere 210. Adde 186624 ad 15876, fit quadratus 202500, cuius latus 450.*

XYLANDRI.

*Et 1 erit* $\frac{16}{16}$*.) uel 1. nã in 256 particulas resolus nihil attinet: cùm si relinquas productũ* $\frac{9}{16}$*, & 1, id est* $\frac{16}{16}$ *adiecta, non minùs quadratum constituant* $\frac{25}{16}$*, quàm fit* $\frac{400}{256}$*. Quadrato etiã in quadratum ducto, semper fieri quadratum, notissimum est, uel ex ijs, quæ sunt apud Campanũ initio noni Euclidis. quod obiter innuit autor.*

XXX. Dentur duo numeri quadrati, ut productus ex alterius in alterum multiplicatione natus, utroq; illorum detracto quadratus relinquatur. Heic si rursus statuã alterum 1 Q, alterum 1, productus ex multiplicatione alterius in alterum erit 1 Q. Oportebat autem etiam 1 subtracta, hunc esse quadratũ. Eò itaq; loci res est deducta, ut quærendum sit quis quadratus demta unitate maneat quadratus. Is est $\frac{25}{16}$ unde si unitatem, scilicet $\frac{16}{16}$ auferas, quadratus $\frac{9}{16}$ relinquitur. Omnia deciesfexies. Statuo itaq; alterum 1 Q, alterum 25. quorum alter in alterum, facit quadratũ. Sed is 25 Q, detractis 25, fit 25 Q —— 25. quod æquatur quadrato. Fingo quadratum lateris 1 N —— 4, qui quadratus est 1 Q † 16 —— 8 N, & æquatur 25 Q —— 25. fit numerus $\frac{17}{8}$. erit ergo alter $\frac{289}{64}$, alter $\frac{100}{64}$. & satisfit postulatis.

SCHOLION.

*Cùm* $\frac{16}{16}$ *subtractis à* $\frac{25}{16}$*, quadratus* $\frac{9}{16}$ *relinquatur: rite ponuntur numeri 25 & 1 Q. qui Quadratus* $\frac{9}{16}$ *debet esse, à latere* $\frac{5}{4}$*. sic enim conficient* $\frac{25}{16}$*, ut unitate, hoc est* $\frac{16}{16}$ *detractis, relinquatur quadratũ. Quod autẽ iubet omnia sedecuplari, id tale est. unitatum 25 unaquaque resoluta in* $\frac{16}{16}$*: ac singulis multiplicatis in* $\frac{1}{16}$*, qui erat Quadratus: fiunt 25 Q, ita ut unusquisq; horũ sit* $\frac{16}{16}$*. Iam in oblata æquatione inter 1 Q † 16 —— 8 N & 25 Q —— 25: utrinq; addantur defectus. 25 Q † 8 N æquabuntur 1 Q † 41. & utrinq; 1 Q abiecto, relinquuntur 24 Q † 8 N æquales 41. Cum autem unumquemq; Q deprehensum sit esse* $\frac{16}{16}$*, erunt hi 24 Q idem quod 24. Ita rursum 24 ab utraq; parte amputato, æqualitas consistet inter 17 & 8 N. & fit 1 N,* $\frac{17}{8}$*. Ergo quadratorum alter est* $\frac{289}{64}$*. & alter, secundum ea quæ superiore propositione dicta sunt* $\frac{100}{64}$*: à latere* $\frac{10}{8}$*. Cùm enim 25 Quadrati, quorũ quisq; erat* $\frac{16}{16}$*, latus fuerit* $\frac{5}{4}$*. cum iam inuẽtus sit numerus* $\frac{17}{8}$*: oportet reliquũ quoq; esse* $\frac{5}{4}$ *ex 8, id est* $\frac{10}{8}$*. Ceterùm quod producitur* $\frac{289}{64}$ *in* $\frac{100}{64}$ *multiplicato, est* $\frac{28900}{4096}$*. in tales partes reducti quos inuenimus, sunt* $\frac{18496}{4096}$ *&* $\frac{6400}{4096}$*. Aufer 18496 de 28900, relinquetur 10404 quadratus, cuius latus 102. Aufer 6400 à 28900, relinquitur quadratus 22500, à latere 150.*

XYLAN-

XYLANDRI.

*Mirifica hæc est ratio inueniendæ simplicis æquationis, quã imitari per occasionẽ possis. Mendæ in autoris & scholiastæ Græcis uerbis inhærentes, probè me exercuerunt.*

XXXI. Inueniendi sunt duo numeri, ut qui procreatur altero eorũ in alterũ multiplicato, siue ei summa numerorum addatur, siue ea ab ipso detrahatur, utroq; modo quadratus exsistat. Duo quicunq; tandem numeri sint: eorũ quadratorũ summę si uel addas uel adimas duplũ eius quod producitur numerorũ ipsorũ altero in alterum multiplicato; semper nascetur quadratus. Eapropter numeros exponemus 2 & 3. liquet aũt si summæ quadratorum ab ijs ortorũ, quæ est 13, addã 12, (duplum eius quod fit 2 in 3 ducto) cõfici quadratũ 25. Et rursum, si à summa quadratorũ idẽ producti duplũ auferã: relinqui 1, quadratũ. His hoc modo consideratis, productũ ab ijs statuo 13 Q. Ipsos aũt, alterũ 1 N, alterum 13 N. quorum alterius in alterũ multiplicatione producũtur 13 Q. Huic siue addas 12 Q, siue adimas: exstabit quadratus. Proinde hoc requiritur, ut 12 Q æquentur summæ numerorũ, quæ est 14 N. fit 1 N, $\frac{14}{12}$, hoc est $\frac{7}{6}$, tantus est minor. maior, 13 N est $\frac{91}{6}$. & satisfit quæstioni.

SCHOLION.

*Cùm pro exemplo assumat 2 & 3. sint 2, 2 N, & 3, 3 N. horum quadratus alterius 4 Q, alterius 9 Q. & horum summa 13 Q. Multiplicato 2 N in 3 N, fiunt 6 Q, quorũ duplum 12 Q. id si addas ad 13 Q, fit 25 Q. quadratus: si subtrahas de 13 Q, relinquitur 1 Q. quadratus. Itaq; ergo eum qui multiplicatione quæsitorum producitur, ponit 13 Q: ut siue addas ei, siue adimas 12 Q, quadratus in prõptu sit. Cæterùm cùm numeros inuenerimus $\frac{7}{6}$ & $\frac{91}{6}$, productus ab ijs est $\frac{637}{36}$. summa ipsorũ $\frac{98}{6}$, hoc est, $\frac{588}{36}$. Ergo siue ad 637 addas 588, quadratus fiet 1225, cuius latus 35: siue auferas 588 de 637, quadratus fiet 49, cuius latus 7.*

XYLANDRI.

*Satis planè omnia scholiastes interpretatus est. Cæterùm hoc de numeris theorema, cui innititur tota operatio, demonstratum est ad quartam & septimam secundi elementorum Euclidis. Quod idem de sequenti intellige. Vides aũt uariè solui posse, & autorem suo consilio minimos 2 & 3 delegisse. uide etiam XVII tertij infrà.*

XXXII. Inueniendi sunt duo numeri quadraro æquales, quorum unius in alterũ multiplicatione qui producitur, ipsorũ numerorũ uel adiecta uel detracta summa fiat quadratus. Datis duob. numeris in dupla ratione: si duplũ eius quod ex uno eorum in alterũ fit, uel addatur ad summã quadratorũ ab ipsis ortorũ, uel ab ea detrahatur: quadratus exsistet. Ponamus ergo 2 & 4, sed ita ut eorũ multiplicatione Q fiat. Ergo altero in alterũ ducto, 8 Q habebimus, utroq; in se, 4 Q & 16 Q, hoc est 20 Q. Ergo ipsos numeros statuemus 2 N, & 10 N. summa 12 N. atqui erat etiam 16 Q. hoc ergo æquatur 12 N. fit 1 N, $\frac{3}{4}$. Erit ergo alter $\frac{6}{4}$, alter $\frac{30}{4}$. & quæstio ijs explicatur.

SCHOLION.

*Simile est hoc problema priori. Sic autem res geritur. Cùm quadratus à 2 N, sit 4 Q: & quadratus à 4 N, sit 16 Q: horũ summa est 20 Q. Vnde si auferamus duplum eius quod fit è 2 N in 4 N (8 Q.) nimirũ 16 Q. relinquentur 4 Q, quadratus. & si hoc duplum ad 20 Q addidisses, confecisses 36 Q, quadratũ itidẽ. Hac de causa productũ ex quæsitis ponit 20 Q, ut siue addatur ei, siue adimatur dictus numerus, quadratus exsistat. Et cum 20 etiã aliorum numerorũ, puta 2 & 10, alterius in alterũ multiplicatione cõponatur; pro numeris quæsitis ponit 2 N & 10 N. quorũ summa sit 12 N, cum quidem 16 Q esse debuerit. æquantur ergo 16 Q & 12 N, ac deminutis nominibus, 16 N & 12. fit 1 N $\frac{12}{16}$, id est $\frac{3}{4}$. & cùm alter sit 2 N, erit $\frac{6}{4}$. alter 10 N, erit $\frac{30}{4}$: quorum etiã summa æquat quadratũ $\frac{36}{4}$. Inuentorum altero in alterum multiplicato, fiunt $\frac{180}{16}$. summa ad easdẽ partes redacta, $\frac{144}{16}$. quadratus & ipse. Ergo siue addis 144 ad 180, quadratũ habes 324, cuius latus 18. siue 144 de 180 auferas, quadratũ habes 36, lateris 6. Poterat etiam alterum 4 N, alterũ 5 N ponere: qui 20 Q ipsi quoq; procreassent. Inuenisses 1 N, $\frac{9}{16}$ ergo alter fuisset $\frac{36}{16}$, alter $\frac{45}{16}$. productus $\frac{1620}{256}$. Summa $\frac{1296}{256}$. Si 1296 addas ad 1620, quadratum habebis 2916, à latere 54. Si 1296 auferas à 1620, quadratus restat 324, lateris 18.*

XYLANDRI.

*Summa ponitur inueniendorum numerorum 16 Q; & productus multiplicatione unius in alterum, 20 Q. &c. Cur hoc? Causam noluit uideri scholiastes se explicasse. quid præstiterit, periti facilè indicabunt. Adfert Diophantus theorema, seu (ut noster scholiastes nuncupat) lemma. sed ad hypostases demonstrandas in eo nihil est adiumẽti. neq; dubito culpa uacare autorem: sed loquor de codice qui in meas incidit manus. Vbi enim est in istis hypostasibus duplum ille pro-*

*ducti, quod uno in alterũ multiplicato fiebat? ubi cætera? Deinde, qui sunt quadrato æquales numeri qui ponuntur? aut quis statim concedet 6 N, aut etiam 12 N conficere quadratum, si alter alteri addatur? puta 2 N & 4 N, aut 2 N & 10 N: nam quod interpres de 4 N & 5 N dicit, nõ est Diophanteum, utcũq; prima fronte uideatur satisfacere postulatis. Iam ἰσως τὲ[?]ραγώνῳ significare, quorum summa quadratum faciat, non modò solutiones quæstionis, altera ab autore, altera à scholiaste proposita, docent: sed apertè admodum testatur quinta propositio sequentis libri & duodeuigesima quarti. Contra has difficultates uideamus entiine possimus analyseos beneficio, & locum deprehendere, qui præteritus est negligentia, nolo enim dicere inscitia, scholiasta. Theorema Diophanteum nihil habet, quod non sit in quarta & septima secundi elementorum Euclideorum: modò binarij naturam & conditiones in recenti habeas memoria. Periculum fiat in 2 N & 4 N, horum multiplicatione producitur 8 Q, cuius duplũ 16 Q, quod additũ aut detractum summæ quadratorum, quæ est 20 Q, quadratum exhibet: ut probè annotauit scholiastes. Sed hoc iam est ad propositionem accommodandum. Fingimus ergo ipsorum numerorum, quos quærimus, summam esse 36. Q, quia conditionem hanc implet, ut 20 Q eo uel addito uel demto, exsistat quadratus, puta 36 Q aut 4 Q. Ergo 20 Q erit productus unius quæsitorum in alterum multiplicatione factus. Restat, ut quæramus qui duo numeri unius in alterum multiplicatione 20 Q producant. Id quidem præstant 2 N & 10 N. Sed tamen horum summa 12 N (ut monui) an sit quadratus, non liquet statim. & certè si 1 N fieret 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c. tunc 12 N conditionem præscriptam non implerent. itaq; cautiùs fecit scholiastes (dices) qui 4 N & 5 N posuit, ex quibus multiplicando componatur 20 Q. Sed Diophantus respexit ad uim demonstrationis, & Euclidearum, quas nominaui, propositionum naturam: qua perspecta intelligere datur, quicunq; sic 20 Q conficient Numeri, summam eorum fore quadratam. Quod de alijs etiam positionibus (infinities enim uariari rem posse quiuis uiderit) accipiendum est. ut si in dupli 3 & 6, aut 5 & 10, &c. fecisses periculum. Deniq; summa Numerorũ 20 Q producentium (siue 2 N & 10 N sint, siue 4 N & 5, aut $2\frac{1}{2}$ N & 16, &c.) æquabitur prius posita ex hypothesi summæ, ut heic 12 N æquantur 20 Q. In uerbis autoris,* Ponamus ergo 2 & 4, sed ita ut eorum multiplicatione Q fiat: *obscurius est. hoc dicit, ad characterẽ N positiones debere accommodari, idq; eo fit consilio, ut inter Q & N æquatio constituatur. Cætera non sunt obscura. problema subtile, & quod acumen diligentis ingenij ad alia similia æmulatione quadam excogitanda ualeat excitare.*

XXXIII. Inueniantur tres numeri, ut cuiusuis horũ quadratus adscito proximè subsequente numero, sit quadratus. Statuatur primus 1 N. Et quoniã quiuis numerus alterius duplum unitate superans, si ad quadratum minoris adijciatur, quadratũ conficit: ergo secundũ faciamus duplũ prioris † 1. hoc est, secundus esto 2 N † 1. Rursumq; tertius unitate excedat duplũ secundi, & sit uidelicet 4 N † 3. Ergo primi quadratus cũ secundo numero, quadratus fit, puta 1 Q † 2 N † 1. Itemq; secundi quadratus tertio adiecto, quadratus fit, nimirũ 4 Q † 8 N † 4. Superest, ut quadratus etiam tertij, primo adiũcto ipsi, fiat quadratus. At fit hoc modo 16 Q † 25 N † 9. æquale scilicet quadrato. Fingo quadratũ à latere 4 N —— 4. is erit 16 Q † 16 — 32 N. ac fit 1 N, $\frac{7}{57}$. tãtus ergo est primus: secũdus $\frac{71}{57}$: tertius $\frac{199}{57}$. Hi sunt, q implẽt cõditiões ꝓpositis.

SCHOLION.

*Et in uniuersum de quibuscunq; numeris hoc conceditur. Sint 2 & 5. hic unitate duplum illius superat. minoris quadratus 4 ad 5 adiectus, quadratum 9 cõficit. Porrò noster quadratum finxit à latere 4 N —— 4, ut N in se ductu Quadratos æquati Quadrati compensare posset: defectu aũt hoc cõsequeretur, ut multiplicando exorientium specierũ N & unitates, altera superaret, ut heic 16 amplius sunt quam 9: altera superaretur, ut heic —— 32 N minus est quàm 25 N. Et paucioribus quidem unitatibus res geri non potuit, defectu notatis omnino: pluribus, pro arbẽtrio. Enimuerò additis & subtractis quæ canon iubet, fit 1 N tandem $\frac{7}{57}$. Ergo primus quadratũ habet $\frac{49}{3249}$. secundus $\frac{5041}{3249}$. tertius $\frac{39601}{3249}$. Ergo quadratus primi (omisso denominatore) 49 cum 4047 secundo (hoc enim fit in partes partium quadratorũ similes facta resolutione, hoc est numeratorib. per 57 multiplicatis) coniunctus, facit quadratũ 4096, lateris 64. Et secũdi quadratus 5041 eodẽ modo cũ tertio cõiũctus cũ tertio 11343, facit quadratũ 16384, cuius latus 128. Et tertij quadratus 39601 cũ primo 399 cõiunctus, quadratũ facit 40000, cuius latus 200.*

XYLANDRI.

*Vel hinc usus theorematũ diligentibus illucescere possit. Est autem huius operationis fundamentum, quadratorum per impares procreatio, de qua aliquantulum ad huius libri octauam propositionem*

*propositionem diximus. Verba scholiastæ sunt mutila & uidetur nō de theoremate, sed de problemate uoluisse dicere, Non tres modo, sed omnino quotuis numeros his conditionib. stantes dari posse, quadratorum hac proprietate ad usum accommodata. Quod de 2 in 5 multiplicandis commemoratur: aliunde est inculcatum.*

XXXIV. Inueniendi sunt tres numeri, ut uniuscuiusque quadratus proximè insequenti numero detracto, quadratum relinquat. Si numerus duplo alterius unitate minor sit: quadratus minoris maiore numero subtracto, quadratū relinquit. Eo cōsiderato, primū pono 1 N † 1. secundū 2 N † 1. tertiū 4 N † 1. ita fit, ut quadratus primi detracto 2: itēq; secundi detracto tertio, quadratos relinquant. Superest, ut tertij quoq; quadratus primo detracto, quadratum relinquat. At relinquuntur 16 Q † 7 N: æqualia quadrato. Hunc fingo à latere 5 N. fiunt æqualia 25 Q & 16 Q † 7 N. fit 1 N, $\frac{7}{9}$. Est ergo primus $\frac{16}{9}$. secundus $\frac{23}{9}$. tertius $\frac{37}{9}$. ac satisfit proposito.

SCHOLION.

*Quadratum fingit à latere 5 N, ut natis 25 Q ubi 16 Q detraxerit, relinquatur æquatio inter Q & N. Quod si ad 16 Q † 7 N adiectæ fuissent unitates, latus quoq; finxisset N † unitatibus. Quod si hic latus fecisset 6 N, aut etiā amplius, successisset negocium. Ceterùm primi quadratus $\frac{256}{81}$ detracto secundo numero, qui ad idem redactus nomen fit $\frac{207}{81}$, relinquit quadratum $\frac{49}{81}$. Et secundi quadratus $\frac{529}{81}$, detracto $\frac{333}{81}$ secundo, relinquit quadratum $\frac{196}{81}$. Et tertij quadratus $\frac{1369}{81}$, primo $\frac{144}{81}$ detracto, relinquit $\frac{1225}{81}$ quadratum, lateris $\frac{35}{9}$.*

XYLANDRI.

*Theorema hoc quoq;, cui innititur solutio quæstionis, è constitutione quadratorū est desumtum, de qua ad octauam huius aliquid diximus. Porrò si latus minus quā 5 N posuisset autor, ad æquationem non peruenisset. Facile autem uides uariari & positiones & æquationes & solutiones innumeris posse modis huius generis problematum.*

XXXV. Da tres numeros, quorum uniuscuiusque quadratus cum summa omnium, constituat quadratum. Si numerus aliquem numerum metitur: metientem de quotiente, id est horum duorum minorem à maiore ubi abstuleris, & semissis eius quod restat quadratum ad numerum ipsum cuius mensura erat proposita adieceris: quadratus conficitur. Hoc intellecto, summam trium quos quæro numerorū pono aliquot Quadratorum, quorum numerus habeat tres ipsum metientes, qualis est 12. quem & 1 metitur, quotiente 12: & 2 quotiente 6: & 3 quotiente 4. Aufero metientes à quotientibus: & residuorum pono semisses, primum 5 $\frac{1}{2}$, secundum 2, tertium $\frac{1}{2}$. Liquet autem horum uniuscuiusque quadratum cum 12 quadratum confecturū, scilicet ij erunt quadrati 42 $\frac{1}{4}$. 16. 12 $\frac{1}{4}$. Ergo has partes pono Numeris in primum 5 $\frac{1}{2}$ N. secundum 2 N. tertium $\frac{1}{2}$ N. Nihil iam restat, quàm ut horum summa sit 12 Q. atqui est 8 N. Hæc ergo æquantur. & 1 N est $\frac{8}{12}$. Ergo primus $\frac{22}{6}$. secundus $\frac{8}{6}$. tertius $\frac{2}{6}$. & satisfit postulatis.

SCHOLION.

*Lemma tale est. Si numerum aliquem alius metitur, & accipiamus etiam eum quo ipsum metitur: & ab horum maiore minorem auferamus: residui semissis quadratus si adijciatur ei quem isti metiebantur, quadratum conficit. Verbi gratia, 6 est numerus quem 3 binario metitur: uel contra binarius ternario. minore itaq; à maiore detracto, 2 à 3, relinquitur 1. huius semissis $\frac{1}{2}$, quadratus eius $\frac{1}{4}$ ad 6 adiectus, quadratū conficit 6 $\frac{1}{4}$. cuius latus 2 $\frac{1}{2}$. Ceterùm numerum 12 autor ideò sumsit, quod is primus est ab unitate, quem tres metiuntur. Solet autem nos semper in minimis exercere numeris. Oportere autem ait summam trium quos posuit numerorum æquari 12 Quadratis. quia assumto 12, quadrati isti fiunt, & assumtis in summa tribus illis. Fit autem 1 N $\frac{8}{12}$, seu $\frac{4}{6}$. poterat etiam dicere $\frac{2}{3}$. sed noluit, hoc agens ut similia essent utrinq;. Primus ergo in 36 partes resolutus fit $\frac{132}{36}$, secundus $\frac{48}{36}$, tertius $\frac{12}{36}$. summa omnium $\frac{192}{36}$. Quadratus primi 484, cum 192, facit quadratum 676, cuius latus 26. Quadratus secundi 64, cum 192, quadratum 256, lateris 16. tertij 4, cum 192, quadratum 196, lateris 14.*

Quadrati inuētio, qui additus numero dato, quadratum conficit.

XYLANDRI.

*Nihil attinebat ipsos numeros ad trigesimas sextas partes reducere. à quibus cum eorum quadrati denominentur, summam omnium $\frac{32}{6}$ satis fuit $\frac{192}{36}$ appellari. Simplicissimè hi numeri sunt $\frac{11}{3}$. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{3}$. summa $\frac{16}{3}$, hoc est $\frac{48}{9}$, quia quadrata per nonas partes exprimentur. Omisso denominatore, 121 & 48 sunt 169, 16 & 48 sunt 64, 1 & 48 sunt 49: omnes quadrati. Canonem*

f 4 hete

*heic fabricari ipsa positionum rationes te docent, neq. attinet ea in re inculcanda occupari. Poterat autem loco 12, quiuis alius sumi, qui tribus alijs præcisè diuideretur, hoc est integris numeris integrè. sic enim 6 metitur 12, & 2 quotiens, est quo eum metitur. Verbi gratia. Sumamus 48, quem metiuntur cùm alij, tum heic 24.12.8. reliqua oculis subieci.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *48. metiendus.* | 24 | 12 | 8 | *metientes.* |
| | 2 | 4 | 6 | *quotientes.* |
| | 22 | 8 | 2 | *residua.* |
| | 11 | 4 | 1 | *semisses.* |

*Horum singulorum quadratos cum 48 facere quadratos, paulò antè exposuimus. semissium horum summa est 16. Ergo, ut antè, minimus $\frac{1}{2}$, &c. Quo pacto inueniantur numeri, quot & quas uolumus mensuras admittentes, neq. ignotum est, & alibi dictum. Lemmatum horum demonstrationem breuitatis causa omitto, cùm alium habeant suum ista locum: & ex secundi libri Euclidis quarta, quinta, septimaq. propositionibus demanauerint. Usus est etiam infrà libro quarto, propos. sexta, & decimaseptima, &c. Certè ad Diametralium inuentionem, unde trianguli orthogonij fiant, numerorum, hic canon mirificè conducit. Verbi gratia, quæro quadratum, qui ad 49 quadratum adiectus, quadratum conflet. 1 & 49 sumo. $\frac{1}{2}$ & 48 est 24. Ergo 576 additus ad 49, quadratum facit 625. Sunt ergo diametrales 7 & 24. & cum 25 orthogonium faciunt. Ita 8.15.17. & 9.40.41. ex 81 in 1 & 80 diuiso, aliiq. innumeri.*

Diametralium & orthogoniorum inuentio.

XXXVI. Inueniendi sunt tres numeri, quorum uniuscuiusque quadratus, multatus summa omnium, quadratus remaneat. Itidem numerum aliquem statuo, qui tres ipsum metientes habet. sitq; rursus 12. additisque singulatim metiente ad eum quo metitur, harum summarum semisses statuo, primum $6\frac{1}{2}$ N, secundum 4 N, tertium $3\frac{1}{2}$ N, quorum singulorum quadrati, si 12 amittant, manent quadrati. Superest ut hi tres numeri æquent 12 Q. summa autem eorum est 14 N. hi ergo æquantur 12 Q. fit 1 N, $\frac{7}{6}$. Erunt ergo primus $\frac{45\frac{1}{2}}{6}$, secundus $\frac{28}{6}$, tertius $\frac{24\frac{1}{2}}{6}$. atq; hi præstant id quod flagitabatur.

## SCHOLION.

*Hæc etiam suo tali lemmate opus habet. Si numerus mensuram habet, componaturq; mensura & quotiens, summæ semissis quadratus, detracto ipso quem metiuntur reliqui numero, manet quadratus. Exemplum. 6 habet mensuram 2 uel 3, alter enim altero eum uicissim metitur. 2 & 3 faciunt 5, cuius semissis $\frac{5}{2}$, quadratus eius $\frac{25}{4}$. hinc si ipsum 6 auferamus, relinquitur $\frac{1}{4}$ quadratus, cuius latus $\frac{1}{2}$. Huius ergo lemmatis methodo positiones, ut & in superiori, instituit. Cùm autem 1 N sit $\frac{7}{6}$, primus erit $\frac{273}{36}$, secundus $\frac{168}{36}$, tertius $\frac{147}{36}$. summa omnium $\frac{588}{36}$. Quadratus primi $2070\frac{1}{4}$, subtractis 588, relinquit quadratum $1482\frac{1}{4}$, cuius latus $38\frac{1}{2}$. Quadratus secundi 784, subtractis 588, relinquit quadratum 196, cuius latus 14. Quadratus tertij $600\frac{1}{4}$, detractis 588, relinquit quadratum $12\frac{1}{4}$ à latere $3\frac{1}{2}$. Si semisses istos euitare uoles, omnia per 2 multiplica, ut fiat primus 91, secundus 56, tertius 49, omnes unciæ seu duodecimæ partes, ipso 1 N posito $\frac{14}{12}$, ita quæstionem citra minutias absoluet.*

## XYLANDRI.

*Græca imitatione scripsi $\frac{45\frac{1}{2}}{6}$ pro $\frac{91}{12}$, & $\frac{24\frac{1}{2}}{6}$ pro $\frac{49}{12}$. & consilium interpretis est commodum. quod autē oēs numeros ad trigesimassextas partes reuocauit, ociosum est. Summa omniū, si statuas numeros $\frac{91}{12}$, $\frac{28}{6}$ & $\frac{49}{12}$, est $\frac{196}{12}$. Quadratus primi $\frac{8281}{144}$. hinc aufer $\frac{196}{12}$ hoc est $\frac{2352}{144}$. relinquitur quadratus $\frac{5929}{144}$, cuius latus est $\frac{77}{12}$. Quadratus secundi $\frac{784}{36}$ hinc aufer $\frac{196}{12}$ hoc est $\frac{588}{36}$. supersunt $\frac{196}{36}$, quadratus lateris $\frac{14}{6}$. Tertij quadratus $\frac{2401}{144}$. aufer $\frac{196}{12}$, id est $\frac{2352}{144}$, restat quadratus $\frac{49}{144}$, lateris $\frac{7}{12}$. Hac est simplicissima ratio atq. expeditissima.*

# DIOPHANTI ALEXANDRINI RERVM ARITHMETICARVM LIBER TERTIVS.

*Gulielmo Xylandro Augustano interprete.*

I. Tres numeri postulantur, ut uniuscuiusq; eorum quadratus à summa omnium numerorum detractus, relinquat quadratum. Pone duos quadratos, alterum ab 1 N, alterum à 2 N: summa quadratorum quos creant, 5 Q. Hoc ipsum 5 Q pono pro summa numerorum: & numerorum qui quæruntur primum 1 N, secundum 2 N. ita duabus propositi partibus est satisfactum. Iam cùm 5 diuisus sit in duos quadratos, 1 scilicet & 4: subdiuidere eum licet, ut suprà demonstratum est, in duos alios quadratos, qui sunt $\frac{121}{25}$ & $\frac{4}{25}$. Pono rursus tertium quæsitorum latus alterius horum, ac sit $\frac{2}{5}$ N, cuius quadratum detractum de summa omnium, seu $\frac{125}{25}$ Q, relinquit quadratum $\frac{121}{25}$ Q. Restat, ut hi tres numeri summam conflent 5 Q. at faciunt $3\frac{2}{5}$ N. ergo 1 N est 85. & primus est 85, secundus 170. tertius 34. qui postulabantur.

## XYLANDRI.

*Quidquid sequitur, id uel non est interpretatus scholiastes, uel ad nos eius lucubratio non peruenit. Nuda enim duntaxat Diophanti uerba accepimus: atque utinam uerè nuda, non mendis cooperta. Faciemus tamen officium, ne uideamur destituisse lectorem imperitiorem, & sub cultro (quod dicitur) reliquisse. Hæc quæstio plurimis potuit diuersis modis solui: & pro summa omnium quauis duorum quadratorum summa statui. sed autor in minimis, ut rectè suprà monuit scholiastes, exercere nos satis habuit. subdiuisio autem tradita est superioris libri propositione decima: quam describere placuit. 5, conflatur è quadratis 4 & 1, quorum radices seu latera 2 & 1. Vt denuò in alios quadratos diuidamus 5, latera ponimus cum Diophanto (potuit enim hoc quoque innumeris modis uariari) 1 N † 1, & 2 N —— 2. Horum quadrata 1 Q † 2 N † 1 & 4 Q —— 8 N † 4 summam conficiunt 5 Q —— 6 N † 5, æqualem scilicet 5. addisisq; & adiectis quapar est 5 Q æquantur 6 N, seu 5 N || 6. Ergo 1 N est $\frac{6}{5}$. & 1 N † 1 alter numerorum $\frac{11}{5}$, alter 2 N —— 2 est $\frac{2}{5}$. horum quadrata $\frac{121}{25}$ & $\frac{4}{25}$, conficiunt summam $\frac{125}{25}$, hoc est 5. (In Græco denominatores ubiq; sunt omissi, ipse, si uidebitur, ex nostra interpretatione passim eos suffecito.) Horum laterum utrum libuerit pro tertio numero adsumitur. & cum primus 1 N, secundus 2 N fuerit, tertius esto $\frac{2}{5}$ N. Summa $3\frac{2}{5}$ N || 5 Q. Fit 1 N itaq; $\frac{17}{25}$. Is ergo est primus numerus: secundus 2 N, seu $\frac{34}{25}$: tertius $\frac{2}{5}$ N est $\frac{34}{125}$. Autor ad centenasuigesimasquintas reduxit etiam reliquos, ut sint quos quærebamus $\frac{85}{125}$, $\frac{170}{125}$, $\frac{34}{125}$. Atque his ita positis, nunc quomodo quæstioni satisfiat, uideamus. 1 N est $\frac{17}{25}$, huius quadratum $\frac{289}{625}$ si per 5 multiplices (nam summa erat 5 Q) $\frac{289}{125}$ habebis: quanta planissimè est summa omnium. Iam cũ numeros quæsitos statuerimus $\frac{85}{125}$, &c. horũ quadrati exsistẽt in partib q̃ denominãtur à 15625. ad quas etiã summa omniũ redacta, $\frac{36125}{15625}$ erit. Ac iamnunc licet isto omniũ denominatore omisso, cæterā p numeratores agere. Quadratus de 85 est 7225. de 170, 28900: de 34, 1156. hi seorsim à 36125 detracti, relinquunt 28900, 7225, 34969, numeros pro se quemque quadratũ, à radicibus 170, 85, 187. Ita nihil in quæstione postulatum fuit, quod non præstiterimus. Alioqui si libet primũ & secundum relinquere suis in numeris minimis $\frac{17}{25}$ & $\frac{34}{25}$. horum quadrata sunt $\frac{289}{625}$ & $\frac{1156}{625}$. summa ad eundem denominatorem reducta $\frac{1445}{625}$. omisso eo, 289 & 1156 si auferas seorsim à numeratore 1445, relinquuntur quadrati 1156 & 289. quod indicare libuit. Cæterum hæ propositiones planè cum libri superioribus ultimis cohærent: ut suspicari interim subeat, librorum diuisiones non esse geminas.*

II. Inueniendi sunt tres numeri, quorum summæ quadratus quouis ipsorum adiuncto quadratum faciat. Quadratum summæ pono 1 Q, numeros ipsos 3 Q, 8 Q, 15 Q. ut quadratus summæ singulis additus, quadratos faciat, 4 Q, 9 Q, 16 Q. Iam oportebit horum trium sic positorum summam æquari 1 N: lateri scilicet quadrati summæ. ergo 26 Q æquantur 1 N. fitq; 1 N, $\frac{1}{26}$. Ipsi autem quos quærimus, erunt $\frac{3}{676}$, $\frac{8}{676}$, $\frac{15}{676}$: & quæstioni satisfacient.

XYLAN.

XYLANDRI.

*ἐκ τ͂ τριῶν τετραγώνων.) ultima uox abundat, & sententiam euertit. ἴσαι ψ΄.) hæc nota nihil est. sed rursum denominator in Græco deest. Libet autem examinare numeros inuentos. Eorum summa est $\frac{26}{676}$, hoc est $\frac{1}{26}$, quadratus summæ $\frac{1}{676}$, adde singulos, habes quadratos $\frac{4}{676}$, $\frac{9}{676}$, $\frac{16}{676}$. Vbi uoles uariabis tuo arbitrio & positiones, & numeros.*

III. Inueniendi sunt tres numeri, ut eorum summæ quadratus quouis ipsorum detracto relinquatur quadratus. Sit summa eorum 4 N, cuius quadratus 16 Q. qui cùm uel 7, uel 12, uel 15 Quadratis detractis maneat quadratus: pono numeros esse 7 Q, 12 Q, 15 Q. horum summa 34 Q. at posueramus eam esse 4 N. ergo hæc æquantur, & 1 N fit 2, Quadratus 4. erit primus 28, secundus 48, tertius 60. & præstant quod habet quæstio.

XYLANDRI.

*Ita omnino legitur. sed res hoc modo habet. 1 N fit $\frac{2}{17}$. 1 Q autem $\frac{4}{289}$. in Græco pro β uitiosè erat 1 β. Numeri ergo sunt $\frac{28\ \ 48\ \ 60}{289}$. Sed autor denominatorem abiecit. Cæterùm horum numerorum summa est $\frac{136}{289}$. cuius quadratũ $\frac{18496}{83521}$. ad tales partes numeri etiam redacti, sunt $\frac{8092}{83521}$. $\frac{13872}{83521}$. $\frac{17340}{83521}$. Iam demum omisso denominatore, 8092, 13872, & 17340 de 18496 aufer singulatim, relinquentur 10404. 4624, & 1156 quadrati, quorum latera 102. 68. 34.*

IV. Cedo numeros tres, ut summæ eorum quadratus à quouis ipsorũ detractus, quadratum relinquat. Esto summa numerorum, 1 N: eius quadratus 1 Q. ipsi autẽ numeri sint 2 Q, 5 Q. 10 Q. nam horum quisq; quadrato summæ detracto manet quadratus. Porrò cùm summa numerorum sit 1 N: & uicissim tres illi, quos posuimus, simul sint 17 Q. fit 1 N, 1. & quadratus eius 1. ipsi autem, qui poscebantur, numeri sunt 2. 5. 10.

XYLANDRI.

*Heic 1 N fit non 1, sed $\frac{1}{17}$. & quadratus eius $\frac{1}{289}$. numeri ipsi $\frac{2.\ 5.\ 10}{289}$. Horum summa est $\frac{17}{289}$: scilicet $\frac{1}{17}$. & huius quadratus $\frac{1}{289}$. quem si à numeris ipsis auferas. relinquentur quadrati $\frac{1.\ 4.\ 9}{289}$: quod uidere quiuis possit.*

V. Tres numeri quæruntur, quadrato æquales, quorum bini tertium quadrato superent numero. Statuamus eos æquales esse quadrato lateris 1 N † 1, qui est 1 Q † 2 N † 1. ac superent primus & secundus iuncti tertium unitate. fit tertius $\frac{1}{2}$ Q † 1 N, ut primus & secundus eum unitate superent. Rursum secundus & tertius primũ quadrato superent, nimirum 1 Q. erit similiter primus 1 N † $\frac{1}{2}$, & reliquum secundus, uidelicet $\frac{1}{2}$ Q † $\frac{1}{2}$. Restat ut primus cũ tertio secundum superent quadrato, at quo eũ superant, sunt 2 N, æquale quadrato, scilicet unitatibus 16. fit 1 N, 8. Ergo primus est 8 $\frac{1}{2}$, secundus 32 $\frac{1}{2}$. tertius 40. & satisfaciunt proposito.

XYLANDRI.

*Hæ quoq; positiones sunt arbitrariæ. Et quia satis obscura est res, explanemus nonnihil. Quadratum ponit autor minimum 1 Q † 2 N † 1, quia & 1 Q, & 1, quadratus est: & 2 N. duo complementa repræsentat. qua de re suprà monui. Ergo primum & secundum tertio unitate, tertium & secundum 1 Q præstare primo ponit: quod omnino aliter licuit, sumto etiam alio quadrato simili. sed theses consideremus hoc pacto. Tres sunt numeri, quorum summa 20 A & B 6 ampliùs sunt quam C: B & C 4 ampliùs quam A: C & A 10 amplius quam B. Heic si numeros inuenire compendio lubeat, 6, quo C ab A & B iunctis superatur, à summa omnium (20) aufer, semissem residui statues C. item 4, quo A ab B & C superatur, aufer de 20, semissis reliqui dabit A. & 10 de 20 relinquunt 10, cuius semissis 5 est B. ut uides.*

```
        ⎧ A   8 ⎫
B † 10  ⎨ B   5 ⎭ C † 6.
        ⎩ C   7 } A † 4.
   ________________________
        20. summa.
```

*Hinc ergo causa operationis Diophanteæ intelligi potest. Primus & secundus 1 amplius habent quam tertius. aufer 1 à summa omnium, residui 1 Q † 2 N semissem habes tertius $\frac{1}{2}$ Q † 1 N. Rursum secundus & tertius primum uno quadrato superant. id aufer de summa omnium: residui 2 N † 1 semissis, 1 N † $\frac{1}{2}$ primo debetur. hoc à summa primi & secundi*

*secundi ($\frac{1}{2}$ Q + 1 N + 1) subductum, relinquit secundo $\frac{1}{2}$ Q + $\frac{1}{2}$. Adde primum & tertium, habebis $\frac{1}{2}$ Q + 2 N + $\frac{1}{2}$. aufer secundum, relinquitur 2 N, excessus primi & tertij supra secundum. Cur autem æquat 2 N cum sedecim unitatibus? Quia ita, inquam, collibuit. Nam cuicunque quadrato numero 2 N æquaueris, res succedet. impares autem propter minutias uitabis, cùm $\frac{1}{2}$ unitatis, & $\frac{1}{2}$ N heic requirantur. Arripuit ergo autor 16. ut radix fieret 8. Numeros ipsos positionum resolutione nullo negocio inuenies. nam 1 N + $\frac{1}{2}$ est 8 $\frac{1}{2}$. 1 Q est 64. ergo $\frac{1}{2}$ Q + $\frac{1}{2}$ est 32 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ Q + 1 N est 32 + 8, hoc est 40. Summa horum numerorum est 81, quadratus. Primus & secundus sunt 41. aufer tertium, restat 1 quadratus. Secundus & tertius 72 $\frac{1}{2}$. aufer primum, restat 64 quadratus. Tertius & primus 48 $\frac{1}{2}$. aufer secundum, restat 16 quadratus. Si 2 N æquasses, cum 4, numeri exstitissent 2 $\frac{1}{2}$. 2 $\frac{1}{2}$. 4 & satisfecissent quæstioni. Multo commodiùs, si 2 N || 36 posuisses. nam A 18 $\frac{1}{2}$, B 162 $\frac{1}{2}$, C 180 fuisset. A & B summa 180, aufer C, restat 1. B & C summa 342 $\frac{1}{2}$. aufer A, superest 324. C & A summa 198 $\frac{1}{2}$. aufer B, relinquitur 36, quadrati omnes, quadratus etiam 361, summa omnium. Hæc enim conditio est in propositione hac, ut & in superioris trigesimasecunda, adiecta, quòd summam oporteat quadratum numerum conficere. Eamq́ inculcat sequens propositio. Quòd si ea abesset, tuo arbitratu quadratos sumeres, & citra ullam molestiam immensam uim soluendi debitum ostentares. Quærantur, uerbi gratia, tres numeri, quorum bini reliquum quadrato superent. Sit A B, C + 9. B C sit A + 25. C A uerò B + 81. Addo quadratos, summa 115. hinc aufer 9, restant 106. ergo C est 53. Aufer 25 à 115, restant 90. ergo A est 45. Denique 81 ab 115 subtractis, supersunt 34. ergo B est 17. Atque hos numeros satisfacere postulatis, licet experiri. & alios quadratos si sumsisses, eodem modo alios reperisses numeros.. Quod autem summam interuallorum quibus bini quique tertium excedunt, eandem hic quoque ponimus quam ipsorum numerorum. ut & libro primo fecimus, propos. duodeuigesima, id non est quod existimes fieri temerè. Nam ipsa Algebrica necessitates ostendunt, aliter rem habere non posse. Repetamus docẽdi caussa superius exemplum de tribus numeris, quorum A B sint C † 6, B C autem A † 4, & C A denique B † 10. Dico summam omnium A B C, non posse aliam esse quam 20, quæ est interuallorum summa. sint A B, 1 N, erit C, 1 N —— 6. Ponamus A esse 1 Q, B erit 1 N —— 1 Q. ergo B C: 2 N —— 1 Q —— 6. cui æquatur 1 Q (puta A) † 4. fit 1 Q, 2 N —— 5, hoc est A. id de 1 N ablatum, relinquit 5. tantus est B. Deniq. A C sunt 2 N —— 11, æquale 15, quod est B † 10. Est ergo 1 N, 13. & qui quærebantur, sunt A 8, B 5, C 7. neque alios ratiocinatio suggerit; & horum summa, itidem ut interuallorum, est 20. Iam fingamus summam esse ampliorem summa interuallorum: sitq́, uerbi gratia 22. Sint A B 1 N, erit utiq. C, 22 —— 1 N. quibus si 6 addas, habes 28 —— 1 N, quod æquetur 1 N. est ergo 1 N 14, summa A & B. ergo C erit 8. Esto A 1 Z, addantur B, 14 —— 1 Z, & C 8; summa 22 —— 1 Z æqualis 1 Z + 4. fit 1 Z, 9. tantus est A. B ergo 5. Adde A & C, habes 17. at B + 10. tantùm 15 est. Non ergo explicabile. Erat hoc problema, sed absurdum. Rursum fingamus summam esse minorem summa interuallorum sitq́ 18. sint A B 1 N, erit C 18 —— 1 N, cui si addas 6, erit 24 —— 1 N æquale 1 N, isque est 12. ergo A B sunt 12, & C est 6. Sit A 1 Y. erit B 12 —— 1 Y. Ei adde C, habes 18 —— 1 Y æqualia 1 Z + 4. fit 1 Y, 7. tantus est A, B 5, C 6. adde A C, fiunt 13. atqui B & 10, sunt 15. ergo quæstio hæc sibi non constat. Hæc ut non recondita admodum superiore libro prudens omiseram. nunc in rudiorum gratiam quod ea tamen annotaui, peritiores boni consulant. Vide etiam decimamquintam quarti, & uigesimamsextam eiusdem.*

VI. Alio modo hoc expediemus. Primùm tres numeros quæro quadratos, qui quadratum conficiant. Si duos numeros quadratos compono, ut 4 & 9, summa 13. quæritur quis quadratus sit numerus, qui 13 si adsciscat, quadratus fiat. is est 36. Ergo hi tres quadrati, æquant quadratum. Restat ut quæramus tres numeros, quorum bini reliquum certo excedant numero. ita scilicet ut primus & secundus ultra tertium 4: secundus & tertius ultra primum 9: tertius & primus ultra secundum habeant 36. Atque hoc iam antè est demonstratum. Et sunt numeri, qui impleant conditiones quæstionis 20, 6 $\frac{1}{2}$, 22 $\frac{1}{2}$.

## XYLANDRI.

*Sic accipe. Trium horum numerorum summam 49 ponimus. & quæstio nunc sic instituitur.*

*Tres*

*Tres numeri sunt, quorum summa 49. A & B amplius quã C habent 4. B & C quã A amplius 9. C & A quàm B, amplius 36. Nosq; adeo iam ostendimus rationem eam istos inueniendi, quam sub inuolucro innuit potiùs & proposuit, quã exposuit autor. Aufer 4 à 49, semissis reliqui est 22 $\frac{1}{2}$, C. aufer 9 à 49, reliquit semissis 20, est A. aufer 36 à 49, reliqui semissis 6 $\frac{1}{2}$, B. Et elegans est hæc ratio, & uariari poterat alijs quadratis sumtis.*

VII. Inueniantur tres numeri quadratum conficientes, quorum bini iuncti itẽ quadratum constituant. Statuamus quadratum, qui est summa istorum trium, esse 1 Q + 2 N + 1. Ac sint primus & secundus iuncti, 1 Q. ergo tertius erit 2 N + 1. Iam secundus & tertius æquentur quadrato lateris 1 N —— 1, qui est 1 Q —— 2 N + 1. Cùm aũt trium summa sit 1 Q + 2 N + 1, relinquitur primus 4 N, reliquis ab ea detractis. Atqui primum & secundum statueramus summã conficere 1 Q. est ergo secundus 1 Q — 4 N. Restat ut summa primi ac tertij 6 N + 1 æquet aliquem quadratum, sitque is 121. ergo 1 N est 20. Et numeri quos desiderabamus, sunt 80, 320, & 41. qui imperata faciunt.

XYLANDRI.

*Grauiter deprauârat librarius problema non adeò obuium. quid sit legendum, uersio mea satis demõstrat. Vides autem heic quoq; multis solutionibus esse locum, ob licentiam positionũ. neq; enim opus fuit summam ponere 1 Q + 2 N + 1, sed aliud quoduis quadratũ potuit adsumi. quod idem de reliquis intelliges. Quod ad extremum 6 N + 1 æquantur quadrato numero 121, fit ut 1 utrinq; abiecta 6 N æquent 120. ut uitentur minutia. Licebat autem etiam quemuis aliũ quadratũ accipere, qui unitate abiecta per 6 diuidi possit. cuius rei exempla sunt 49, 289, 361, & plures alij. Nam si 6 N + 1 || 49 statuas, 1 N est 8. numeri 32. 32. 17. si 6 N + 1 || 289. 1 N est 48. numeri 192, 2112, 97. si 6 N + 1 || 361. 1 N est 60. numeri 240, 3360, 121. qui planissimè satisfaciunt proposito, stantibus thesibus, & resolutis prout radicis ualor se obtulit.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | *4* | *N* | | | |
| *B* | *1* | *Q* | —— | *4* | *N* |
| *C* | *2* | *N* | + | *1* | |

IIX. Aliter. Sit summa numerorum 1 Q + 2 N + 1. sintq; primus & secundus iuncti 1 Q. ergo tertius 2 N + 1. Item secundus cum tertio sit 1 Q —— 2 N + 1: & quia tertius est 2 N + 1, erit secũdus 1 Q —— 4 N. ergo primus, qui cum hoc 1 Q faceret, est 4 N. Summa horum omnium est 1 Q + 2 N + 1. Sed & primus cum secundo, & secundus cum tertio, facit quadratum. Ergo summa denique tertij & primi, quæ est 6 N + 1, æquabitur alicui quadrato. Is sit 36. erit 1 N $\frac{35}{6}$. erit primus 140, hoc est $\frac{840}{36}$. secundus $\frac{385}{36}$. tertius $\frac{456}{36}$. atque hi satisfacient quæstioni.

XYLANDRI.

*Denominatorem omisit siue Diophãtus, siue librarius. Licuit aũt rursus uariare omnia. 840 & 385, quadratũ constant 1225, lateris 35. 385 & 456 quadratum constant, 841, lateris 29. 456 & 840 quadratum constant 1296, lateris 36. Denominatorẽ esse quadratũ satis liquet. Si quadratum numerũ adsumas, qui unitate detracta per 6 præcisè diuidatur, carebis minutijs. 25 id non præstat, quia 1 N fieret 4, & secũdus 1 Q —— 4 N fieret 16 — 16, quod est nihil. Sume 121, erit 1 N, 20. & si hypostases sequaris, numeri erunt 80. 320. 41. summa 441, quadratus. quadrati etiam qui ex binis colliguntur, 400, 361, 121. Idem aliter effecisses adscito ad æquationem 289, 144, 361, & innumeris alijs.*

IX. Quæruntur tres numeri progressionis arithmeticæ, quorum bini quadratũ conficiant. Principio tres numeros quadratos quæro æqualib. interuallis distãtes, quorum summæ semissis maior sit quouis ipsorum. Esto primus 1 Q: secundus 1 Q + 2 N + 1: interuallum 2 N + 1, quod additum secundo, tertium facit 1 Q + 4 N + 2. atq; is æquatur quadrato. Latus 1 N —— 8, producit quadratum 1 Q + 64 —— 16 N: huic æquemus 1 Q + 4 N + 2. fit 1 N $\frac{62}{20}$, hoc est $\frac{31}{10}$. Erit ergo primus 961, secundus 1681. tertius 2401. qui satisfaciunt quæstioni: nimirum, tres sunt quadrati, progressionis arithmeticę, & semissis summæ horum, quouis ipsorum est maior. Venio nunc ad id quod quæritur, scilicet quo pacto tres numeros eodem interuallo se superantes inueniamus, quorum bini coniuncti, faciant quadratum. Primùm quęro tres quadratos arithmeticę progressionis, uti iam demonstratum est. suntq; hi 961, 1681, 2401. Inueniendum iam est quomodo primus & secundus facere possint 961: secundus

& ter-

& tertius 2401: tertius & primus 1681. nam ob interualli æqualitatem inuersio quędam facta est ordinis. Statuamus eorum quos quærimus, summam esse 1 N. & cùm hoc sit, 961, quę est summa primi ac secundi, aufero de 1 N: restat tertius 1 N —— 961. Rursum si auferam secundum & tertiũ de 1 N, restabit 1 N —— 2401 primus. & si tertium ac primum de 1 N abstulero, erit secundus reliquus 1 N —— 1681. Reliquum est, ut hi tres sint æquales 1 N. & fit 1 N, $2521\frac{1}{2}$. Ergo ipsi numeri sunt $120\frac{1}{2}$, $840\frac{1}{2}$, $1560\frac{1}{2}$. satisq; fit postulato.

### XYLANDRI.

Tres numeros quadratos.] *Ita omnino res postulat, & uox τετραγώνους à librario malè est praterita. Vult autem sumi quadratos quàm minimo se inuicem interuallo excedentes: ideò semissem summa uult quouis eorum esse maiorem. aliòqui explicari aquationem non posse, mox docebimus. Quod aũt quadrato ponit latus 1 N —— 8. arbitrarium est: modo 1 N (quæ ponitur ad 1 Q utrinq; abolẽdum) adyciatur numerus tantus, cuius multiplicatione in se & radices, aquatio harum specierum exsistere possit. quod unico exemplo infrà ostendere satis habebimus. Iam ut 1 N fiat in autoris opere $\frac{31}{10}$, facilimum est deprahensu. & si denominatorem in contexendis reliquis omitteres, tota uia aberrares. fierent enim 961. 1024. 1087. quorum postremus quiduis potius est quàm quadratus. Nunc cum N sit $\frac{31}{10}$: primus (utpote 1 Q.) est $\frac{961}{100}$. secundus cõficitur ex $\frac{961}{100}$, ut 1 Q: & 2 N, quod est $\frac{62}{10}$ siue $\frac{620}{100}$, ac 1, seu $\frac{100}{100}$. summa $\frac{1681}{100}$. ad hũc tertio itidem accedunt $\frac{620}{100}$ ut 2 N, & $\frac{100}{100}$ ut 1. usq; fit $\frac{2401}{100}$. atq; horum unius supra alterum excessus, secundi supra primum tertij supra secundum, est $\frac{720}{100}$. Porrò autem licet abiecto nominatore uti ipsis quadratis 961, 1681, & 2401, 720 interuallo progredientibus. Quorum summa cum sit 5043, ad extremum 3 N —— 5043 aquantur 1 N, hoc est 2 N || 5043. & fit 1 N, semissis summa horum quadratorum, quouis ipsorum (ut mandatum erat) maior. Ab hoc semisse, scilicet $2521\frac{1}{2}$, ipsi quadrati sublati, relinquunt eos qui quarebantur numeros. faciunt autem $120\frac{1}{2}$ & $840\frac{1}{2}$ additi quadratum 961. $840\frac{1}{2}$ & $1560\frac{1}{2}$ additi 2401, quadratum. $1560\frac{1}{2}$ & $120\frac{1}{2}$, 1681 quadratũ, quod licet experiri. Quod si latus illius quadrati posuisses 1 N —— 6, aquatio exstitisset 17 || 8 N. & 1 N erat $\frac{17}{8}$. Quadrati $\frac{289}{64}$. $\frac{625}{64}$. $\frac{961}{64}$. seu 289. 625. 961: interuallo 336. Eorum summa 1875. & ad extremum aquabuntur 2 N || 1875. fit 1 N, $937\frac{1}{2}$. & qui desiderantur numeri, haberi non possent: quia quadratorum ultimus 961, maior est quam semissis summa $937\frac{1}{2}$. qui ergo ab eo auferetur? Itaq; uides 1 N —— 6 latus esse nimis magnum, & prudenti στοχασμῷ utendum esse. Posuit ergo latus minus binario, 1 N —— 8. & res confecta est, ut uides. Quod si latus adhuc minus ponas, puta 1 N —— 10, aquabitur tandem 98 cum 24 N. ergo 1 N erit $\frac{49}{12}$. Eius quadratus $\frac{2401}{144}$, secundus $\frac{3721}{144}$, tertius $\frac{5041}{144}$. Omisso denominatore, 2401, 3721, & 5041 quadrati sunt, interuallo 1320 progredientes. summa 11163 aquatur 2 N. & 1 N est eius semissis, quemuis quadratorum superans istorum, $5581\frac{1}{2}$. à quo seorsim quadratis subtractis relinquuntur C $3180\frac{1}{2}$, B $1860\frac{1}{2}$, A $540\frac{1}{2}$. A & B constant 2401, B & C 5041, C & A 3721, quos constat esse quadratos. atq; sic aliter soluta quastio est.*

X. Dato aliquo numero, inueniendi sunt tres alij, quorum bini adscito illo qui datus est, quadratum consient. Sed & summa horũm trium adiecto qui datur, quadratum exhibeat. Sit datus iste 3. compositus è primis duobus 1 Q † 4 N † 1, ut adscito 3 fiat quadratus. Compositus è secundo & tertio 1 Q † 6 N † 6. Summa autem omniũ sit 1 Q † 8 N † 13, eadem uterque de causa. Iam cùm quos quærimus tres, coniũcti sint 1 Q † 8 N † 13, & primus ac secundus sint 1 Q † 4 N † 1, relinquitur tertius 4 N † 12. Et rursum summa secundi & tertij 1 Q † 6 N † 6 subducta à summa omnium, restat primus 2 N † 7. Et summa primi ac secundi cùm sit 1 Q † 4 N † 1, primus hinc sublatus, secundum relinquit 1 Q † 2 N —— 6. Restat ut primus cũ tertio, adiecto 3, faciat quadratum. Fit autem 6 N † 22. quod æquatur quadrato. Esto is 100. fiet 1 N, 13. eritq; primus 33. secundus 189, tertius 64. qui conditiones propositi implent.

### XYLANDRI.

*Positionum ratio hæc quoq; facilis est. posuit enim laterum 1 N † 2, 1 N † 3, 1 N † 4 quadratos ternario multatos, ut is additus quadratos redderet (ponere 1 N † 1 noluit, quia 3 de eius quadrato si auferantur, restat 1 Q † 2 N —— 2. noluit ergo uti diuersis signis. aliàs licuit etiã hoc modo uariare operationem.) subtractione deinde singulos inuenit, ut uides. & 6 N † 22*

 *aquat*

*æquat quadrato, quem ſuopte arbitrio delegit: cautè quidem talem, ut ab eo 22 deductis, reliquum citra minutiam poſſet per 6 diuidi. Eſt ergo hoc arbitrarium, & uariari poteſt innumeris modis. Nam ſi (uerbi gratia) æquaſſes cum 64, 1 N eſſet 7. & numeri 21. 57. 40. optimè ſatisfacturi & hi propoſito. ut ſubſcriptum exemplum utrinſq; docet.*

*1 N. 13.*
*97. adde 3. { 33 / 189 / 64. } — 33 + 189 = 222. adde 3. 225. — 189 + 64 = 253. adde 3. 256.*
*100.*
*Summa 286.*
*adde 3. 289.*

*1 N. 7.*
*61 † 3. 64 { 21 / 57 / 40 } — 21 + 57 = 78. † 3. 81. — 57 + 40 = 97. † 3. 100.*
*118 † 3. 121.*

XI. Tres numeros inueniemus, quorum bini dato aliquo numero eodem multati, quadrati ſint. ſumma quoq; inuentorum, dato illo demto, quadratus ſit numerus. Eſto datus 3. Summa primi & ſecundi 1 Q † 3, quæ amiſſo 3 relinquatur quadratus. Eademq; de cauſa ſumma ſecundi & tertij ſit 1 Q † 2 N † 4. Summa quoque omnium quos quærimus, ſit 1 Q † 4 N † 7, ut deminuta ternario retineat quadratum. Heic cùm ſumma trium ſit Q † 4 N † 7: ab hac ſumma primi & ſecundi ſi auferatur 1 Q † 3, tertius utique ſupererit 4 N † 4. Is à ſumma ſecundi & tertij detractus 1 Q † 2 N † 4, ſecundum relinquet 1 Q — 2 N. rurſum hic ablatus à 1 Q † 3, ſumma primi & ſecundi, primum relinquet 2 N † 3. Huic adiectus tertius, ſummā facit, quæ ſi 3 amittat, ſuperſunt 6 N † 4. quæ æquantur alicui quadrato. ſitq; is 64. erit primus N, 10. Proinde quæſitorum primus 23, ſecundus 80, tertius 44. quos quæſieramus.

XYLANDRI.

*Hæc ex ſuperioribus facilè intelliguntur. & æquatio rurſum fuit arbitraria. nam 6 N † 4 æquare poteram (uerbi gratia) etiam 100. ut 1 N eſſet 16. uel æquari 16, ut 1 N fieret 2, &c. Vt ſequitur.*

*1 N. 10.*
*67 — 3. { 23. / 80 / 44 } — 23 + 80 = 103. — 3. 100. — 80 + 44 = 124 — 3. 121.*
*64.*
*147 — 3.*
*144.*

*1 N 16.*
*103 — 3. { 35 / 224 / 68 } — 35 + 224 = 259 — 3. — 224 + 68 = 292 — 3.*
*327 — 3.*

*1 N. 2.*
*19 — 3. { 7 / 0 / 12 } — 7 + 0 = 7 — 3. — 0 + 12 = 12 — 3.*
*16 — 3*

*Vides etiam in falſa poſitione ſatisfieri æquationi. qua de re dictum alibi.*

XII. Tres numeri deſiderantur, ut quem bini, alter in alterum multiplicatus, producunt, is adſcito dato aliquo fiat quadratus. Datus eſto 12. Heic ſi ab aliquo quadrato ſubtrahas datum, facilè patet reliquum fore eum qui è primo fit in ſecūdum: quod is 12 addito fiet omnino quadratus. Auferam 12 de quadrato, puto 25: ſuperſunt 13. hoc fit primo in ſecundum ducto. Sit primus 13 N, ſecundus 1 N. ut producāt 13 Q ſua multiplicatione. Rurſum ab alio quadrato auferam 12, ut habeam quod fit ſecundo in tertium ducto. auferam à 16. relinquuntur 4. Ergo ſecundus in tertium ductus gignet 4. cumq; ſit ſecundus 1 N, erit tertius 4 N, qui 4 Q producant. Reſtat ut productum tertij in primū, adſcito 12, faciat quadratum. Productum eſt 52 Q. Ergo 52 Q † 12, quadratum ualent. Hoc loco facilis eſſet æquationis ratio ſi 13, qui numerus eſt primo loco factorum 13 Q, quadratus eſſet. Quod cùm non ſit, eò res deducta eſt, ut duo numeri ſint inueniendi, quorum multiplicatione unius in alterum procreetur quadratus: & præterea uterq; cum 12 coniunctus, quadratum exhibeat. Sed & ſi loco numerorum quadratos inueniam: ij ſua multiplicatione quadratum producent. Inuentis igitur quadratis duobus, quorum uterq; adſumtis 12 fiat quadratus, expedita erit æquatio. ſunt aūt 4 & $\frac{1}{4}$. quorū uterq; 12 additus facit quadratū.

His

His ita repertis, refero me ad id quod egeram initio. Pono primum numerum 4 N: secundum 1 N: tertium $\frac{1}{4}$ N. Restat ut quod primo in tertium multiplicato producitur, additis 12 fiat quadratus. Tertius in primum gignit 1 Q. Ergo 1 Q † 12, quadrato æquatur. Hunc fingo à latere 1 N † 3, fit 1 Q † 6 N † 9. & fit 1 N, 3: ac præstantur imperata.

XYLANDRI.

*Est hoc problema non mendosum mutilumq́; modò, sed & multa habet uero & inuicem repugnantia. ut quidem ad nos delatum est. quæ ordine explicabimus, & doctiorib. iudiciũ permittemus. Primò omnium cur theses ab absolutis numeris deuocet, nõ satis apparet. Nam si numeri ponantur absoluti 13. 1. 4. qua methodo eos Diophantus inuenit, (12 de 25 & 16 quadratis detracto: & residuis loco extremorum, 1 pro medio positis) optimè satisfit quæstioni. Producuntur enim binorum multiplicatione 13. 4. 52. quorum singulis si 12 addas, fiunt 25. 16. 64. quadrati omnes: uti postulabatur. At si has theses ad cossicos numeros contrahas: quomodo res constet, uiderint alij. Equidem 13 † 12 est quadratus, 25. at 13 Q † 12, qui sit quadratus, aut cur hoc fingi oporteat, nescio. & quemcunq; ualorem demto 1 adsignaueris radici, impinges sit enim N 2. erunt 13 Q, 52. adde 12. fit 64. quadratus. pergamus. 4 Q † 12 hoc pacto sunt 16 & 12, hoc est 28, neutiquã is quadratus. & 52 Q † 12 erunt 220, nihil minùs quàm quadratus. Scio bis esse in uerbis μονάδας, & sic etiam in sequẽti propositione: sed δυνάμεις legendum euincit ratio. & æquatio ultima 52 Q † 12. unde abundè probatur, 12 unitates eum addere quadratis ex positionib. quarum numeros ad N contraxit, confectis. Iam 13 Q, est quidem quod ad signum attinet, quadratus, fateor. sed radicem quadratum ex 13 Q uellem uidere: profectò neq; 13 N est, neq; 13, ne tale quicquam esse potest. & nisi 1 Q statuatur 13, quod ipsum quale sit uides, nihil efficies. Quod aũt æquationem hanc ut inexplicabilẽ relinquit, neq; eam fingendo latere (ut aliàs) absoluit: demiror. Nam si 52 Q † 12 æques (ut suprà factum est propositionib. 7. 8. 10. 11. & alibi) numero quadrato, puta 64; detractis utrinq; 12, erit æquatio inter 52 Q & 52. hoc est inter 1 Q & 1. atq; sic 1 N faciet 1. ac soluta erit quæstio, quo diximus modo. Enimuerò hoc tũ demũ cõtingit, cùm numerus absolutus, & qui est signatus, additi quadratum faciunt, ut heic. uel cùm absolutus numerus addi quadrato potest, ut summa sit quadratus: numerus aũt Q notatus ipse etiam quadratus est. ut 784 Q † 36 æquantur 100. nam 36 utrinq; detracto, fit 784 Q || 64. & 1 Q $\frac{4}{49}$. 1 N $\frac{2}{7}$. Sed hoc modo etiã quæstionem nõ solui, doceamus exemplo. Quærãtur tres numeri, quorũ bini quem producunt, is cũ 21 faciat quadratum. Pono 4 N 1 N. 100 N. quia 21 ad 4 & ad 100 additus, quadratos facit 25 & 121. Ergo 400 Q † 21 itidem debebat esse quadratus. æquo eũ quadrato 121. fit undiq; detractis 21, 400 Q || 100. hoc est 4 Q || 1. ergo 1 Q est $\frac{1}{4}$, & 1 N est $\frac{1}{2}$. Erũt ergo numeri quos quærimus 2 $\frac{1}{2}$. 50. at primus duntaxat & tertius producunt, qui adiũctis 21 fit quadratus. de reliquis hoc falsum est: neq; dum soluta quæstio, utcunq; æquatione soluta. Diophãtus hac methodo deplorata, ad aliã confugit: cuius si causam nobis aperuisset, minus laboraremus. Equidẽ propositio non quadratos, sed quoquo modo ex multiplicatione binorum natos numeros compositos postulat, qui 12 numero aucti, quadratos numeros constituãt. & extremi thesiũ numeri, manente eodem medio, mutari non possunt, quin cõditiones quæstionis infringãtur. deniq; in proximo nostro exẽplo quadrati sunt extremi 4 & 100. quos 1 medius multiplicãdo nihil quicquã alterat. neq; tamen res succedit. Tamen Diophãtus iubet duos quadratos inueniri, quorum uterq; cum 12, faciat quadratũ. Id quia heic autor non ostendit qua ratione fiat, doceamus obiter. De altero constat, in hoc quidem proposito. nemo enim nescit 4 & 12 esse 16. & ex dictis ad 8 ac 11. libri secundi huius operis, facilè uides ut sit hoc inueniendum. alter ergo sit 1 Q. ergo 1 Q † 12 æquatur quadrato. Huius latus fingo 1 N — tot unitatib. ut duplum harum minus sit quã 12, quadratũ maius quã 12. quo cõsilio, ex alijs id genus Diophãteis effictionib. discere potuisti. Sit latus 1 N — 4. ergo 1 Q — 8 N † 16 æquatur 1 Q † 12 ac tandẽ 4 || 8 N. est ergo 1 N, $\frac{1}{2}$. & quadratus alter $\frac{1}{4}$: qui cum 12, facit quadratum 12 $\frac{1}{4}$ seu $\frac{49}{4}$. Quod si latus finxissem 1 N — 5, erat futurus $\frac{169}{100}$ à radice $\frac{13}{10}$. nam & $\frac{169}{100}$ cũ 12, hoc est cũ $\frac{1200}{100}$, cõficit $\frac{1369}{100}$, cuius latus $\frac{37}{10}$. Sed priori usus est Diophãtus. Si de neutro cõstaret, ut si datus numerus esset 18, res plus operæ posceret. Nam 18 ad nullum integrũ potest addi quadratus, ut quadratus cõstetur: cum par sit, ac semissem habeat imparem. de qua re plura (ut modò innui) ad 8 superioris libri propositionẽ diximus. Priùs ergo per undecimã eiusdem duo sunt quærendi quadrati, quorum interuallum sit 18. ij sunt $\frac{1}{16}$ & $\frac{289}{16}$, inuenti positis lateribus 1 N & 1 N † 4. Et quia 18 ad $\frac{1}{16}$ additus, fit*

Aliud exemplum.

Dare duos quadratos qui cũ dato numero singuli iuncti, quadratum cõficiant.

*quadratus $\frac{289}{16}$: erit $\frac{1}{16}$ alter quadratorum quos quaerimus. esto alter 1 Q. ergo 1 Q † 18 aequabitur quadrato. quod effingo à latere 1 N —— 6. fit 1 Q † 36 —— 12 N aequalis 1 Q † 18. & fit 1 N $\frac{3}{2}$, ipse quadratus $\frac{9}{4}$. & is quoque ad 18, vel $\frac{72}{4}$ additus, $\frac{81}{4}$ quadratū conflat. Ita omnino huic proposito satisfit. Caeterum Diophantus hos quadratos ita inuentos, pro extremis ponit, ea lege, ut primus sit 4 N, tertius $\frac{1}{4}$ N. Medius ergo statuendus est 1 N, ut eius cùm in primum, tum in tertium producto 12 additus, faciat quadratum: quod quale sit, supra ostendi. Est sanè in Graeco nota senarij ϛ. Sed locum habere non potest. nam ut 6 in 4 facit 24, cui additis 12 fit quadratus 36: ita 6 in $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{4}$ gignit, quibus si 12 accedat, 13 $\frac{1}{2}$ seu $\frac{27}{2}$ fit, nequaquam quadratus numerus. Saepe autem, & rursus etiam proximè subsequenti propositione deprehendimus ϛ̄ pro ᾱ scriptum. Vnitas autem in extremos multiplicata, suapte natura nihil mutat. Quod ad aequationem attinet, 1 Q † 12 || 1 Q † 6 N † 9, in Graeco est itidem vitiosè positum καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ. non enim 3, sed $\frac{1}{2}$ fieri radicem siue numerum, est certissimum atque euidentissimum. Quod ait autem, impleri postulata quaestionis: cùm ipsos qui quaeruntur numeros non perhibuerit, id carere non possum. Hoc quidem comperies, siue priores positiones 13 N, 1 N, 4 Q: siue posteriores 4 N, 1 N, $\frac{1}{4}$ N, resoluas vel per 3 vel per $\frac{1}{2}$ ut radicis valorem; nunquam te postulata quaestionis impleturum. Iam mea illa solutio proposita à Diophanto quaestionis fortuita uideri potest, & unius exempli: quaeritur autem haec uniuersalis & ἀμετάπτωτος ratio. Certè in exemplo à me proposito, etsi extremi sunt quadrati: tamen utraque Diophantea methodus nos destituit. Et si inter $\frac{1}{16}$ ac $\frac{9}{4}$, quorum utrique additus 18, quadratum facit, Diophanteo more inseras 1: nunquam tamen efficies, ut quod fit ex primo in tertiū, $\frac{9}{64}$, additis 18 sit quadratus. est enim $\frac{1161}{64}$. Itaque huius quidem quaestionis solutio apud Diophantum non exstat: atque (ut ingenuè fatear quod res est) excogitare ex ipsius operationibus, ut in meas peruenerunt manus, nō possum, quos ille numeros soluendo problemati huic destinauerit. Habemus itaque satis nimirum ἀπορῶν, & διαπορῆσαι utique licuit. Videamus nunc quatenus πάρεργον nobis sit hoc πρὸς τὸ [illegible]. nam Diophantea haec nos non expediunt: nisi quis (quod fieri potest) acutius atque ego ista perspicit. Expediamus ergo rem nostro Marte, domesticisque copijs, & Diophanto tenebras, quantum quidem in nobis est, detergamus, sequamurque adeò eius vestigia. Quia 12 de quadratis 25 & 16 subtractus, reliquos facit 13 & 4. placuit Diophanto ex A in B fieri 13, ex B in C, 4. quod ubi successisset, restabat ut id quoque praestaremus, ut C in A multiplicato productus, 12 adscito quadratum faceret. Ponamus A esse 13 N, ergo B est 1 N. ita enim ex his producitur 13 Q, qui cum 12 facit 13 Q † 12 aequalia 25. & abiectis utrinque 12, aequatio est inter 13 Q & 13, id est inter 1 Q & 1. ergo 1 N est 1. & 13 N sunt 13. Eodem modo pro C pono 4 N. fit ex B in C, 4 Q † 12 aequale 16. rursumque 1 N fit unitas. Denique C in A ducto, & additis 12, fiunt 52 Q † 12, aequanda & ipsa quadrato alicui. Fictio haec locum non habet, quia ad N nulla unitatum multitudo adscribi potest, ne fractissimorum quidem, quae in se ducta 52 producat. Causa incommodi est, quod 4 quadrato in 13 surdum ducto, necesse fuit surdum produci. sicut contrà futurus erat quadratus, si 4 in quadratum multiplicatus fuisset, aut similis quadrato in similem quadrati. quae omnia ad initium noni Euclidis demōstrātur, & ad Diophanteae posterioris positionis causam explicandā conducit. Relinquere enim voluit B, 1 N, sed extremos ita mutare, ut non modò quod ex B tam in A quàm in C fit, 12 adiecto quadratum fieret: sed etiam quod ex C in A fit, eadem lege teneretur. Debuerunt ergo A & C ambo esse vel quadratorū similes, vel quadrati, ut ait Diophātus: cùm utroque modo multiplicatio quadratum gignat, ut paulò antè docuimus. Quo artificio inueniantur, demōstraui. sit ergo primus 4 N, secundus 1 N, tertius (ordinis mutatio nihil impedit, erat enim antè primus 13, cui nunc succeditur, ut inepto) $\frac{1}{4}$ N. De primo in secundum nō est opus repetere. B in C gignit $\frac{1}{4}$ Q, cū 12 aequale 12 $\frac{1}{4}$. & abiectis 12 utrinque, $\frac{1}{4}$ Q aequatur $\frac{1}{4}$, & 1 N fit 1. C in A denique fit 1 Q. quod aequatur, si ei 12 addas, cum 12 $\frac{1}{4}$. & rursus 1 N fit 1. Ergo A est 4, B 1, C $\frac{1}{4}$. Atque sic non satisfit postulatis. Nam si A in C duco, 1 fit, quod cum 12 non facit quadratum. Itaque Diophantus quadrati cui aequetur 1 Q † 12, latus finxit 1 N † 3. ut aequentur 1 Q † 6 N † 9 cum 1 Q † 12. Omnino autē utrinque 1 Q & 9 abiectis, aequantur 3 & 6 N. & 1 N fit $\frac{1}{2}$, quo valore hypostases posteriores resoluta, fiunt A 2, B $\frac{1}{2}$, C $\frac{1}{8}$. Sed ne sic quidem satisfit postulatis. nam A in B procreat 1, cui 12 additus, quadratū non gignit. Executus sum, quantum bona fide potui, Diophantea λείψανα. Nunc me ad quaestionis propriā conuerto solutionē, ingenuè professus, me in ea sententia esse, omnes has difficultates ortas ex nō satis considerata hypostaseon institutione, & ad Cossica signa applicatione.*

CANON. *Vnitatem pro medio ponemus, pro altero quadratū numerum, cui*

additus

*additus is qui proponebatur, quadratum facit: pro reliquo quadratum à latere latus unitate superante latus quadrati sic collecti, sed multatum proposito numero. Ita heic dato 12, cum is ad 4 addatur, & 16 quadratum conficiat, 4 erit primus, secundus 1, tertius 13, hoc est 25 (quadratum à 16, qui quadratus fiebat 12 ad 4 adiectis) —— 12. Sed videamus hoc in altero exemplo, ubi 21 erat propositus numerus. Is & ad 4 & ad 100 additus quadratum facit 25 aut 121. Sit primus 4, secundus 1, tertius ergo 15 (nam 4 & 21 sunt 25. quadratus ab hoc proximus 36, unde 21 ablato, relinquitur 15.) Primus in secundū, & hic in tertium, utrobiq; faciunt adiectis 21, quadratos 25 & 36, ex hypothesi. Sed & tertius in primum, 15 in 4, ductus, fit 60. quibus si addas 21, habes quadratum 81. Rursum sit primus 100, secundus 1, tertius 123 (nam ab 121, qui fit primo in secundum ducto & 21 addito quadratus, proximus est 144.) 100 in 123 ductu & additis 21, rursum fit quadratus 12321, lateris 111. Aliud exemplum. Sit datus numerus 72. Is ad 289 quadratum additus, (quod ex annotatis ad octavam secundi docui) quadratum facit, cum colligatur ipse ex imparibus 35 & 37. quadratus 361, lateris 19. Proximè maior à latere 20, est 400, inde aufer 72, relinquitur 328. Sunt ergo numeri 289, 1, 328. nam 1 nihil multiplicando mutante, 72 ad 289 & 328 additus, quadratos faciet 361 & 400. Sed & 289 in 328 ductis, productoq; 72 additis, fit 94864, quadratus à latere 308. Deniq; dentur numeri tres, quorum bini quem producunt, is adscito 30 ut faciat quadratum. Eius numero 30 è censu est eorū numerorum, qui nulli quadrato integro adijci possint, ut quadratus fiat summa. quod suprà est à nobis commemoratum. Fracti cùm alij multi sunt quadrati, tum $\frac{1}{4}$, qui cum 30 quadratum cōstituat. quod invenire ex paulo antè traditis non est difficile. nam latus quadrati cui aequetur 1 Q † 30, si ponas 1 N † 5: aequatio erit inter 1 Q † 30, & 1 Q † 10 N † 25. hoc est inter 5 & 10 N. & 1 N erit $\frac{1}{2}$, ergo 1 Q $\frac{1}{4}$. Esto igitur primus $\frac{1}{4}$, secundus 1, quorū producto si 30 adijcias, quadratus fit $30\frac{1}{4}$ sive $\frac{121}{4}$, cuius latus $\frac{11}{2}$ seu $5\frac{1}{2}$. Id unitate auctum, (6[illegible]) quadratū facit $\frac{169}{4}$, unde si 30 subducantur, relinquuntur $\frac{49}{4}$ quod pro tertio ponamus. Ergo primus in hūc multiplicetur, conficient $\frac{49}{16}$. quibus si addas 30, sive $\frac{480}{16}$, habebis quadratum $\frac{529}{16}$: ut iā nihil desiderādum in ratione problematis huius explanandi videri possit. Vides etiam perinde esse, unitas quotus in ordine numerorum habeatur. Porisma. Si quis numerus additus quadrato, quadratum cōficiat.* Quadratorū proprietas. *si eundem numerum subtrahas à quadrato, cuius latus unitate sit maius quā eius qui modò erat confectus quadratus latus, hocq; residuum multiplices per quadratum cui numerus datus initio fuerat adiectus, producto ipsum datū numerum si adiunxeris, denuò te habiturum quadratū aio. Potest hoc quoq; inter raras quadratorum proprietates haud iniuria (nisi fallor) referri. Et suus erit, uti spero, de eo & similib. plura dicēdi locus theorematis. Equidē non puto me rectè facturū, si ex hac planicie in cossicarum positionū salebras vel me vel lectorem conijciam: maximè cùm unitate pro triū horū aliquo numerorū quaesitorū ipse utatur Diophātus. Aliud potius theorema subijciā, quod multo etiā expeditiùs soluēdae quaestioni inserviit. Si de duob. numeris quadratis, quorū latera unitate differūt, eundē numerū detraxeris, & residuorū alterū in alterū multiplicaveris, pducto idē numerus, qui à quadratis erat detractus, adiectus quadratū faciet. Sit detrahēdus 21. quadrati 80 & 100. residua 60 & 79. productus eorū multiplicatione 4740, ergo 4761 quadratus lateris 69. Ergo si quaerantur numeri tres, quorū bini cum 26 faciant quadratum, hunc ego auferam ab 36 & 49. residui 10 & 23 cum unitate proposito satisfacient. Nam 230 & 26 sunt quadratus 256, &c.*

XIII. Inveniātur tres numeri, ut quem bini, alter in alterū multiplicatus, cōficiūt, eorū quisq; numero qui imperatur multatus, quadrat⁹ relinquatur. qui imperatur, esto 10. Quando productus primi in secundum multiplicatione is est, cui si 10 adimas, quadratus relinquatur: addā 10 alicui quadrato, ut eum cōsequar. Sit quadratus 4. ergo qui fit è primo in secundū, erit 14. Sit primus 14, erit secundus 1. rursumq; in numeris constituamus, quorum multiplicatione Quadrati 14 fiant. Sit primus 14 N, secundus 1 N. Alij porrò quadrato addam 10, ut habeam productum è secundo in tertiū. is quadratus esto 9. ergo secundus in tertium facit 19 Q. Restat ut primus in tertium quē gignit, is adsumto 10 fit quadratus. Ergo 266 —— 10 aequantur quadrato. Proinde ob ea quae superiore propositione ostendi, cò devenitū est loci, ut quaerendi sint duo quadrati, quorū uterq; demto 10 maneat quadratus. Quod facilè fit, si quęras quis quadratus demto 10 maneat quadratus. Sanè si cui numero adijcitur 1, & summae dimidiū in se ducitur, atq; à sic facto quadrato numerus initio sumtus detrahitur; relinquitur rursum quadratus. Addo 1 ad 10, summa 11. huius semissis $5\frac{1}{2}$.

 à cuius

à cuius quadrato 30 $\frac{1}{4}$ si aufero 10, relinquitur quadratus 20 $\frac{1}{4}$, cuius latus 4 $\frac{1}{2}$. Statuo iam primū esse 30 $\frac{1}{4}$. ultimū 1. & necesse erit ut 1 Q etiā demto 10, sit quadratus. Ergo 1 Q — 10 æquatur quadrato. Huius latus fingo 1 N — 2, fit quadratus 1 Q + 4 — 4 N. & fit 1 N, 3 $\frac{1}{2}$. Ergo tertius quem statueram 1 Q, erit 12 $\frac{1}{4}$, primus 30 $\frac{1}{4}$. quorū uterq; est demto 10, quadrat⁹. Venio ad id quod initio quærebatur. Statuo numeros, primū 30 $\frac{1}{4}$ N, secundum 1 N, tertium 12 $\frac{1}{4}$ N. Restat, ut qui fit ex primo in tertiū, 370 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{16}$ dētis 10, æqualis relinquat quadrato. & ut Quadrati integri sint, multiplicemus per 16. Ergo sic 5929 Q — 160 æquabuntur quadrato lateris 77 N — 2. Qui quidē quadratus est 5929 Q + 4 — 308 N. fit 1 N, $\frac{1}{77}$. Statuerā primū 30 $\frac{1}{4}$. is erit 1244. secundū 1. is erit 77. tertium 12 $\frac{1}{4}$, is erit 502 $\frac{1}{4}$. & stat propositum.

X Y L A N D R I.

*Idem est omnino meus de hoc problemate sensus qui fuit de superiore. Certè hi numeri 14.1.19. quæstionem planissimè explicant. Sunt enim producti eorum multiplicatione 14. 19. 266. à quibus singulis si 10 auferas, relinquūtur profectò quadrati 4.9.256 Et æquatio illa 266 Q — 10 optimè explicatur, si quadrato 256 compares. nam 10 utriq; addito, fit 266 Q + 266. id est 1 Q + 1. ut suprà. Artificium aūt illud inueniendi numerū quadratū, qui dato aliquo mulctatus tamen quadratus maneat: scitum est, & è procreatione quadratorum, de qua ad 3 secundi diximus, desumtum. Adde 1 ad 11, fit 12. huius semissis 6, quadratus 36, unde 11 aufero, relinquitur quadratus 25. cuius latus scilicet 5, duplicatum, addita unitate proximè maiorē quadratū gignit. Sed hæc aliàs. Obiter tamen hoc moneā, nullum esse numerum pariter imparē, id est cuius semissis impar est, quo detrahi ab aliquo integro numero quadrato possit ita, ut quadratū relinquat. cū & impares, & alio modo pares hoc possint. nā de imparib. quidē è dicto loco abunde id liquet. Sed & 12, cū constet ex 5 & 7, quib. ad 4 additis 16 fit, ab hoc subtractus quadratū relinquit 4: & 16 ex 7 & 9 cōflatus, quæ ad 9 adiecta 25 cōstituunt, ab hoc detractus, 9 relinquit quadratū. Cætera prosequi nō est opera. Enimuerò qui sit integer quadratus, à quo 12, 16, 20, &c. subtractus quadratū relinquat: nunquā inuenies ex hoc canone, facilimè si eū, ut fecimus, in duos proximos impares diuidas. puta 20 in 9 & 11: quæ addita ad 16, faciunt 36, à quo 20 si auferas utiq; 16 relinquūtur, &c. At fractos inuenies etiā cōplures. unum ex autoris Canone; alios pro eo atq; 1 Q — 20 æquaturi quadrati latus uariaueris. Verbi gratia. duos uolo inuenire quadratos, à quorum utroq; 20 si auferas, residua sint quadrati. Datis in duos proximos impares iā exposita diuisio, ostendit alterū esse 36. Aliū sic inuenies. 1 Q — 20 æquatur quadrato. Eius latus pono 1 N — 8 (scilicet ut duplū unitatis nō excedat numerū 20 & earū quadratū ut eum superet) fit 1 N, 5 $\frac{1}{4}$. Ergo ipse quadratus $\frac{441}{16}$ unde si $\frac{320}{16}$ (hoc enim est 20) auferas: $\frac{121}{16}$ relinquitur quadratus. Hunc ipsum inuenies Diophanteo usus canone. Quod si latus posuisses 1 N — 6, 1 N fuisset $\frac{14}{3}$ quadratus $\frac{196}{9}$ nam ab hoc etiā si 20, seu $\frac{180}{9}$ auferas, superest $\frac{16}{9}$ quadratus. Ex dictis facile est, duos inuenire aut etiā plures quadratos, qui detracto dato numero relinquant quadratos. Practica porrò multiplicatione, quā uocāt, 30 $\frac{1}{4}$ per 12 $\frac{1}{4}$ producit 370 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{16}$. id est 370 $\frac{9}{16}$. Quod fiebat in fracta utroq; cōuerso, $\frac{121}{4}$ per $\frac{49}{4}$, productus $\frac{5929}{16}$. Ergo 370 $\frac{9}{16}$ Q — 10 æquat autor quadrato: prius omnib. per 16 multiplicatis. ut res sit expedita magis. (nā cū 16 sit quadratus, omnino quadratus manebit numerus per 16 multiplicatus, siquidē quadratus iā antè habebatur.) ut 5929 Q — 160, quadrato alicui æquet. Eius latus posuit 77 N — 2 nā cùm 77 sit radix quadrata numeri 5929: utiq; 77 N in se ductū, 5929 Q dabit. hi ergo mutuò abolebuntur: fientq; N plures, numerus absolutus minor q̄ 160. ut uides. De reliquis uiderit autor. Nā mihi quidē nemo persuaserit ex hac æquatione 1 N fieri $\frac{1}{77}$. aut positiones has inde emergere quæ pro solutione quæstionis ponuntur, aut eos proposito satisfacere numeros. Canonem fabricari ad imitationē superioris non est difficile.* CANON. Duos aliquos numeros, serie numerandi naturali se continuò insequētes, pro tuo arbitrio deliges. Vtriusq; quadrato datū adijcies: habes extremos, unitate mediū occupāte locū *(licet enim uariare.) Sit datus numerus 8, aut 11, aut 18. Erunt qui quæruntur 17.1.24. Item 111.1.132. & 67.1.82. nā pro primo exemplo latera 3 & 4, pro secūdo 10 & 11, pro tertio 7 & 8 breuitatis causa delegi.* Porisma. *Si duobus quadratis numerus, quorum latera unitate differunt, idē numerus addatur: producto ex collectorū uno in alterum si detrahas eundem datū numerū, residuus erit quadratus. Quadrati laterū 16 & 17, aucta 40 sunt 296 & 329. Horum multiplicatione producitur 97384 au-*
40 *fer 4, habes quadratum lateris 312. Quæ autem porrò de his duabus propositionibus, & alijs etiam quibusdam disputari posse existimem, suo explicabitur loco.*

Duos numeros inuenire quadratos, qui dēto utrique dato eodem maneāt quadrati.

Quadratorū proprietas.

XIV. Den-

XIV. Dentur tres numeri, quorum bini uno in alterum multiplicato producant numerum, qui adiecto ipsi reliquo sit quadratus. Vnum postulatorum præstabitur, si quadratum sumamus, cuius aliquam partem tertij numeri loco ponatur, reliquũ productus è primo in tertium statuatur. Sit lateris 1 N † 3 quadratus 1 Q † 6 N † 9. Ponamusq; tertium esse 9. ergo quod fit è primo in secundum est 1 Q † 6 N. Sit primus 1 N, erit ergo secundus 1 N † 6. Restat ut quod fit ex secũdo in tertium, 9 N † 54, adiecto primo, scilicet 10 N † 54, æquale sit quadrato. & item quod fit ex tertio in primum, 9 N, adiecto secundo, nimirum 10 N † 6, utrunq; æquetur quadrato. Duplex heic existit æquatio. Nam cum interuallum harum summarum sit 48: duo sunt inueniendi quadrati numeri, qui isto distent interuallo. quod & facile est factu, & innumeris fieri potest modis. ac sint sanè 16 & 64. utri horum æquationem accommodes, reperietur quantus sit 1 N. Etenim si dicas 64 æquari 10 N † 54, 1 N erit 1. idẽ eueniet, si 16 æquentur 10 N † 6. Ergo, ad propositum, erunt numeri primus 1, secundus 7, tertius 9: qui propositionis conditionibus satisfaciunt.

XYLANDRI.

*Hæc quæstio, eiusq; tractatio elegans est, & artificij minimè uulgaris. quam uariari pro arbitrio posse, satis uel prima indicatur positione. neq; expedit copia detineri lectorem In Græco autem ualdè manca est hæc propositio: ego rem, non uerba, descripsi. Posito primo 1 N, secundus sit 1 N † 6. nam ortus ex primi in secundum multiplicatione 1 Q † 6 N diuisus per primum, quantus sit secundus prodit. De duplicata æquatione memineris eorum quæ libro superiore ad propositionem duodecimam sunt explicata. etsi nihil est causæ cur canonibus ibi traditis utare potissimùm: cùm quadratorum quorum interuallum sit quicunq; datus numerus, ut heic est 48, inuentio tradita sit XI propos. lib. II. Diophanti. Numeros inuẽtos quæstioni explicandæ satisfacere, facilius est experiri, quam ut præmonstrato opus sit. Rectè autem & de facilitate & de uariandi licentia autor monuit. Nam ut relinquamus hypostases, neq; pro quadrato 1 Q † 6 N † 9 alium (quod innumeris fieri potuit modis) adsciscamus, pro quadratis 16 & 64, usurpare licebat alios quadratos Sanè 1 & 49 inuenisses numero 48 distantes. per XI secũdi Diophanteorũ, positis lateribus 1 N, & 1 N † 6. æquatione inter 48 & 12 N † 36 oblata. Sed ij quadrati hypostasibus accõmodari nullo modo possunt, cùm 10 N † 54 utiq; plus sit quàm 49. &c. si ponas latera 1 N & 1 N † 2, inuenies quadratos 121 & 169. Si 1 N & 1 N † 4, eos habebis, quos usurpauit autor. Si 1 N & 1 N † 3, quadrati erunt laterum $6\frac{1}{2}$ ac $8\frac{1}{2}$, scilicet $\frac{169}{4}$ & $\frac{121}{4}$, quorum interuallum $\frac{192}{4}$, hoc est 48. & cætera. Iam si quadratos sumsissemus 169 & 121, utroq; modo ad hypostases & posita si accommodetur ratio, 1 N erit $11\frac{1}{2}$. ac tantus est primus secundus $17\frac{1}{2}$. tertius ex hypothesi 9. Duc $11\frac{1}{2}$ in $17\frac{1}{2}$, fient $\frac{805}{4}$, adde 9, habes $\frac{841}{4}$ quadratum lateris $\frac{29}{2}$. Duc $17\frac{1}{2}$ in 9, habes $157\frac{1}{2}$, adde $11\frac{1}{2}$, habes quadratũ 169. Duc 9 in $11\frac{1}{2}$, erunt $103\frac{1}{2}$, adde $17\frac{1}{2}$. habes 121 quadratũ. Reliqua tibi mãdo. Quod si duplicata uti libuisset æquatione, nõ minor se obtulisset uarietas. interuallũ.n. inter 10 N † 54 et 10 N † 6, est 48. quẽ multi numeri cõponũt. Si sumas 4 et 12, habebis quadratos 64 maiorẽ. 16 minorẽ si 2 et 24, habebis 169 et 121. Si 3 et 16, habebis $\frac{169}{4}$ et $\frac{121}{4}$, etc.*

XV. Dentur tres numeri, ut quem bini alter in alterum multiplicatus producũt, is reliquo detracto sit quadratus. Statuatur primus 1 N. secundus 1 N † 4. horũ multiplicatio producet 1 Q † 4 N. huic producto, ut fiat quadratus, tertius detrahendus est. Hunc nos ponemus ergo 4 N. Restat ut secundus in tertium, primo detracto sit quadratus. productus 4 Q † 16 N, ablato primo, fit 4 Q † 15 N, æquale quadrato. Itẽ tertius in primum procreat 4 Q. unde si secundus auferatur, restabit 4 Q —— 1 N —— 4 quadrato æqualis. Et rursum duplex occurrit æquatio. Nam cùm horũ quadrato æqualium interuallum sit 16 N † 4: quærantur duo numeri, quorum unius in alterum multiplicatione hoc interuallum producatur. Ii sunt 4 N † 1 & 4. Horum summæ dimidiæ quadratus æquatur maiori: uel interualli semissis quadratus æquatur minori. Fit 1 N, 25. & quæsiti, ac respondentes postulatis numeri 25, 105, 100.

XYLANDRI.

Hũc nos ponemus ergo 4 N.) *His enim producto multato, restat 1 Q, quadratus utiq; Cætera in Græco mutila, meo Marte correcta dedi. Diuisio 16 N † 4 in duos è quibus multiplicando componatur, facilis est intellectu & simplex. Vsus autem heic est canone, quẽ duodecima secundi tradidit: quia citra nouam æquationem expediri res non quibat. 4 N † 1 & 4, faci-*

*uni 4 N † 5. dimidium 2 N † 2$\frac{1}{2}$. huius quadratum 4 Q † 10 N † 6$\frac{1}{4}$ aequatur 4 Q † 15, ut maiori (de minore tute experitor.) Fit autem 1 N, non 25, sed $\frac{25}{10}$. & numeri sunt non 25, 105, 100: sed planè $\frac{25}{20}$, $\frac{105}{20}$, $\frac{100}{20}$. hoc est $\frac{5}{4}$. $\frac{21}{4}$. $\frac{20}{4}$ seu 5. Horum primus in secundum facit $\frac{105}{16}$. aufer tertium $\frac{80}{16}$ (seu $\frac{20}{4}$.) Restat quadratus $\frac{25}{16}$. Secundus in tertium gignit $\frac{105}{4}$. aufer $\frac{5}{4}$, utpote primum: restat $\frac{100}{4}$, scilicet 25, quadratus. Tertius in primum procreat $\frac{25}{4}$. aufer $\frac{21}{4}$, scilicet secundum: restat quadratus $\frac{4}{4}$, hoc est 1. Licet autem hoc quoq; pro arbitrio uariare, manēte primo 1 N, & secundo eum quotquot collubuerit unitatibus superante: quibus positis, tot N utiq; fiat tertius. ut si primus sit 1 N, secūdus 1 N † 10, erit tertius 10 N. & fiet duplicato aequatio inter 10 Q † 99 N & 10 Q —— 1 N —— 10 aequalia quadrato. Interuallum 100 N † 10. quod compones ex 10 N † 1 ac 10. aut 50 N † 5 & 2, &c. pro re nata & tuo arbitrio.*

XVI. Quaeruntur tres numeri, quorum bini alter in alterum si multiplicetur, numerum producant, cui reliqui quadratus adiectus, quadratum conficiat. Esto primus 1 N, secundus autem 4 N † 4, tertius 1. ita duo postulatorum praestauerimus. Superest ut tertius in primum quem producit, is secundo adscito sit quadratus. Atqui hoc modo fit 16 Q † 33 N † 16. quod aequatur quadrato, cius latus fingo 4 N —— 5. cuius quadratus 16 Q † 25 —— 40 N aequatur 16 Q † 33 N † 16. Fit 1 N, 9. Et numeri 9, 328, 73, soluunt nodum.

XYLANDRI.

*Subtilis est hac inuentio, & digna obseruatu. Quadratū esse hunc 4 Q † 4 N † 1, uel extractione radicis quadrata deprahendas: qualem ad 16 superioris libri exposuimus. fit enim à latere 2 N † 1, sicut 441 quadratus est lateris 21, & 961 quadratus lateris 31: & 9 Q † 6 N † 1 latus habet 3 N † 1. Proinde unitate tertio adsignata, 4 Q † 4 N, diuisit per 1 N, quem primum facit, ut secundus esset 4 N † 4. & horū multiplicatio produceret id, cui unitatis quadratus additus, totum quadratum restitueret. Nam neq; unitas multiplicat absoluta, neque à suo differt quicquam quadrato; ut notissimum est. Itaq; etiam secundus in tertium multiplicatus, idem manet, & 1 N adscito, primi quadrato, totum propositum quadratum reficit. Reliqua sunt plana: & facile est notare ex saepe iam ostensis, cur latus 1 N —— ) fingatur. Enimuerò 1 N fit non 9: ut est in Diophanto, sed $\frac{9}{73}$, primus omnino: & reliqua $\frac{328}{73}$. $\frac{73}{73}$. id est 1. Sed quia uno in alterum multiplicato, partes à quadrato 73, hoc est à 5329 denominata exsistunt: & quadratum addendum eandem semper denominationē nanciscitur: ideò cōmodè & rectè denominatore cōmuni abiecto numeri statuuntur 9 328. 73. quorum primus in secundū facit 2953, quib. si 5329 tertij quadratū addas, quadratū habes 8281, lateris 91. Secūdus in tertiū gignit 23944: adde 81, quadratum primi, fiet 24025 quadratus, lateris 155. Tertius in primum producit 657. adde 107584 quadratū secundi, habes quadratū 108241, cuius radix 329. In superiore exemplo hac abiectio denominatoris locū non habebat: quia multiplicatio 16 partes crearet, quibus integri erant addendi, non itidē quadrati, ut obseruare licuit. Variari positiones & solutiones licere liquet. Nā primū ponere licuit 1 N, secundum 1 N † 2, tertium 1, respectu quadrati 1 Q † 2 N † 1, &c.*

Denominatoris abiectio.

XVII. Desiderantur numeri tres, ea conditione: ut quem bini unius in alterum multiplicatione producūt, is cum duorum istorum à quibus est productus summa, quadratum faciat. Enimuerò quibusuis duobus quadratis, quorum latera unitate distant, altero in alterum ducto numerus fit, cui summa quadratorum addita, quadratum faciat. Esto igitur primus 4, secundus 9, ut qui ex ijs procreatur quadratus 36, cum summa ipsorū quadratum conficiat. Restat ut summa secundi & tertij cum producto multiplicatione ipsorum, itemq; summa tertij & primi cū producto ipsorum multiplicatione, quadratos conflent. Sit tertius 1 N. Erit productus è secundo in tertium cum eorū summa 10 N † 9, aequalis quadrato: & productus è tertio in primum, cū eorum summa, 5 N † 4, aequalis quadrato. Heic quoq; duplex se offert aequatio. Ipsorum interuallum est 5 N † 5. quod qui conficiant duo numeri alter in alterum ductus, quaerantur. sunt autem 1 N † 1 & 5. atq; rursus, ut in secundo libro docuimus, uel summę horum semissis quadratus maiori, uel interualli semissis quadratus minori aequabitur Fit 1 N, 28. Sunt ergo qui desiderabantur, 4. 9. 28.

XYLANDRI.

*Pulcerrimum est theorema quod proponit autor de inueniendis duobus numeris, quorum uno in alterum ducto quod fit, id additus ipsis quadratus fiat. Hoc beneficio 31 secundi huius operis*

*ris etiam potuit indagari. sed praestat ex hoc theoremate desumere, quod quadratis naturali serie se insequentibus, binis quibuscunq; hanc uim tribuit. Idq; etiã ad fractos pertinet. Verbi gratia $\frac{49}{4}$ & $\frac{81}{4}$ quadrati sunt laterum $3\frac{1}{2}$ & $4\frac{1}{2}$. Ipsi producunt $\frac{3969}{16}$, summa ipsorum $\frac{130}{4}$, seu $\frac{520}{16}$ huic addita, quadratus fit $\frac{4489}{16}$, lateris $\frac{67}{4}$. Rursum latera $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{1}{3}$. quadrati $\frac{16}{9}$ & $\frac{49}{9}$ producunt $\frac{784}{81}$. adde ipsorũ summam $\frac{65}{9}$ seu $\frac{585}{81}$, summa $\frac{1369}{81}$, quadratus lateris $\frac{37}{9}$, &c. Caetera sunt satis plana. Numerorum, qui producunt intervallum, summa 1 N † 6. semissis $\frac{1}{2}$ N † 3. quadratus $\frac{1}{4}$ Q † 9 † 3 N aequatur 10 N † 9. utrinq; abijciuntur 9, itemq; 3 N aequantur $\frac{1}{4}$ Q & 7 N, hoc est $\frac{1}{4}$ N ǁ 7, fit 1 N, 28. Examen rem comprobat. Nam 4 & 9 sunt 13 quibus si addas 36, qui è 4 in 9 fit 49, conficitur quadratus. Et 9 in 28, 252 producit, cui si addas 37 (9 & 28) quadratus fit 289. Deniq; 4 in 28 ductus, gignit 112. cui si 4 & 28, id est 32 addas, habes quadratũ 144. Satis autem ipsum theorema docet, loco primi & secũdi quosuis alios quadratos accipi potuisse, quorum latera unitate differrent: itaq; uariari etiam solutiones.*

XLIX. Alio modo idem propositum absoluemus. Statuamus primum 1 N, secundum 3. Altero in alterum ducto, ipsisq; ad productum additis, fit 4 N † 3, quadrato aequale. 15 quadratus esto 25. erit 1 N, $5\frac{1}{2}$. atque sic primo $5\frac{1}{2}$, secundo 3 positis, uni postulatorum satisfactum. nam qui fit ex uno in alterum, cum summa ipsorum conficit 25 quadratum. Supersunt duo reliqua postulata. Pono tertium 1 N. in hunc si ducatur secundus, & summa ipsorum addatur, fit rursum 4 N † 3. at si tertius in primũ ducatur, & producto summa ipsorum adijciatur, fiunt $6\frac{1}{2}$ N † $5\frac{1}{2}$. horum uterq; quadrato aequatur. Sed quia alterius & N & unitatum numerus ijs qui sunt in altero est maior: neque eorum inter se ratio est, quae quadrati ad quadratum: ideò ociosa & inutilis est haec operatio. Eò itaque res deducta est loci, ut inueniendi sint duo numeri, quorum summa cum producto unius in alterum multiplicatione, quadratum faciat: ipsorum autem ratio unius ad alterum sit quae quadrati ad quadratum. Quando numerus alterius quadruplum ternario superat, unitate aucti inuicem rationem habebunt ut quadratus ad quadratum. Constituo primum 1 N, secundum 4 N † 3. Oportet etiam productum horum multiplicatione, cum summa ipsorum coniunctum, aequari quadrato. Fit autem 4 Q † 8 N † 3. Huic aequalis quadrati latus fingo 2 N —— 3. ipse est 4 Q † 9 —— 12 N, ac 1 N fit $\frac{6}{20}$. hoc est $\frac{3}{10}$. tãtus est primus, secundus $\frac{42}{10}$, seu $4\frac{1}{5}$. Ita postulatorum uni est satisfactum. Superest, ut productus secundi in tertium cum summa ipsorum conflet quadratum. Esto tertius 1 N: & cum secundus sit $4\frac{1}{5}$ productus & summa ipsorum facient $5\frac{1}{5}$ N † $4\frac{1}{5}$. aequale quadrato. is ergo sit 25. Rursus cum tertius sit 1 N, primus autem $\frac{3}{10}$: quid ex uno in alterũ producitur, & summa amborum conficiunt $\frac{13}{10}$ N † $\frac{3}{10}$. hoc aequatur quadrato, qui sit 100. Multiplico $5\frac{1}{5}$ N † $4\frac{1}{5}$ in 25, fit 130 N † 105, aequale quadrato. Item $\frac{13}{10}$ N † $\frac{3}{10}$ in 100, fit 130 N † 30, aequale quadrato. Horum differentia est 75, ac rursum duplex se obtulit aequatio, fitq; 1 N, 7. tantus est tertius, & aequalis ei primus. secundus 42. & satisfaciunt quaestioni. Quadratorum similes ut inueniendi.

XYLANDRI.

*Haec quoq; propositio est ex earum numero, quas ut in libro nostro erant, fateor me non assequi. Numeri quidem per has inuenti ambages, proposito nequaquam satisfaciunt. Nam 7 in 42, producunt 294. quibus si illorum summam 49 addas, 343 habebis, minimè quadratum. Et si primum in tertium ducas, 7 in 7, addasq; 14, habebis 63, itidem non quadratum. De duplici aequatione, dictum est ad duodecimam secundi satis, & aliàs. interuallum 75 componemus ex 3 in 25. quadratum semissis summa 196. quadratus semissis distantia 121. hic aequalis 130 N † 30 ille 130 N † 105. fit utrobique 1 N, $\frac{91}{130}$, hoc est $\frac{7}{10}$. hic ergo est primus, $\frac{42}{10}$ secundus, $\frac{7}{10}$ tertius. Sed primus in secundum facit $\frac{294}{100}$, quibus si ipsorum summam $\frac{49}{10}$ seu $\frac{490}{100}$ addas, fit quadratus $\frac{784}{100}$, idem est de secundo in tertium. sed tertius in primum facit $\frac{49}{100}$, quibus si summam ipsorum $\frac{14}{10}$ seu $\frac{140}{100}$ addas, $\frac{189}{100}$ habebis: nequaquam quadratum. ut ne denominatore quidem restituto, tueri Diophanteam possimus solutionem. Enimuerò posterioris partis hypothesis neque cum re, neque secum consentiebat. Quod enim legebatur, si numerus alterum ter, ac 3 praeterea contineat, addita utriq; unitate eos fore quadratorum similes (hoc est enim habere rationem ut quadrati est ad quadratum) falsissimum est, utcunq; expressè id uerba haberent. Ter 6 sunt 18, adde 3, fiunt 21. adde 1 ad 6 & 21, fiunt 7 & 22, nihil minus quàm quadratorum*

*rum ſimiles: niſi fortè quod ex altero in alterum fit 154, quadratus eſt. Id quidem uerum, ſi numerus alter ter & 3 prӕterea contineat: ſi minori 1 addatur, ſummaq́ hac maiori, poſteriorem ſummam ad priorem ſummam rationem quadrati ad quadratum habituram. erūt enim ſumma hӕ ſimiles quadratorum, & altera in alteram multiplicata aut diuiſa, exſiſtet quadratus. nam ſemper in quadrupla erunt ratione. Quicunq; autem numeri rationem habent, à 4. 9. 16, quocunq; demum quadrato denominatam: y omnino ſimiles ſunt quadratorum, ut alibi eſt demonſtratum. Ter 11, uerbi gratia, ſunt 33, adde 3, ſunt 36. adde 1 ad 11, fiunt 12: ſumma priori 12 ad 36, fit 48, poſterior 12 & 48 ſunt ſimiles quadratorum, ratio quadrupla. Ita ſi numerus alium octies, & 8 prӕterea cōtineat: unitas minori, & totum hoc maiori ſi addatur, duӕ ſummӕ erunt quadratorum ſimiles numeri, rationis nimirum nouencuplӕ. Si quindecies & 15, ac ſic agat ut iam dictum, fient quadratorū ſimiles, rationis ſedecuplӕ. At quòd autor numeros ponit 1 N & 4 N † 3; id neque cū ipſius uerbis cohӕret: (nā 1 N † 1, & 3 N † 4 poni oportuiſſet) neq; uerum eſt eos quadratorū eſſe ſimiles. Itaq; nihil haberem heic quidem, quod dicerem, niſi cùm ex ſequenti quӕſtione tū ex re ipſa liqueret pro tripla ratione, quadruplam, pro τριπλασίον, legendum eſſe τετραπλασίον. quod & repoſui. Et huius theorematis ratio quouis exemplo poteſt intelligi. Quis enim neſcit quater 11, † 3, eſſe quater 12, —— 1? Ergo unitas utrobiq; additur, ut ratio quadrupla prorogetur, & fiant de 11 & 47, quadrupli 12 & 48. Itaque de quibuſuis quadratis theorema hoc accipi poteſt. Nam ſi numerus alterum nouies † 8, aut ſedecies † 15, uicies quinquies † 24 contineat, &c, utiq; unitatibus aucti ambo, rationem habebunt nouencuplā, ſedecuplā, uigintiquplā, &c. Cur autem ſolutio non procedat, culpa eſt, quòd tertium primo ӕqualem ſtatuit: cùm fieri nullo modo poſſit, ut in ſe multiplicatus aliquis numerus cum ſui duplo quadratum conficiat. atq; id heic fieri oportebat. Neq; uerò Diophanti uitio hoc damus, ſed librario. Medeamur ergo. Verba hӕc ἵω δὲ ὁ μὲν πρῶτ© τρίτος, tantus eſt tertius, & ӕqualis ei primus: ſic legantur, ἵω δὲ καὶ ὁ πρῶτ© τριῶν δεκάτων, ὁ δὲ δεύτ. &c. Tantus eſt tertius. at primus erat 3, ſecundus, &c. Eſt enim uera ſolutio in his numeris $\frac{3}{10}$. $\frac{42}{10}$. $\frac{7}{10}$. Primus in ſecundum facit $\frac{126}{100}$, adde eorum ſummā $\frac{450}{100}$, habes quadratū $\frac{576}{100}$. de ſecundo in tertium ſuprà diximus. Tertius in primum producit $\frac{21}{100}$. adde eorum ſummā $\frac{100}{100}$. habes quadratum $\frac{121}{100}$. & ſatisfactū eſt ſubtili admodum artificio quӕſtioni. Porrò 25 & 100 quadratos adſciſcere docuit autorem ratio denominatorū 5 & 10. qui ſunt dupli: quadrati eorū quadrupli. Reſtat unus ſcrupulus, quòd non poſuit quadratorū ſimiles, ut uidebatur inſtituiſſe propoſito ad hoc conſequendū theoremate. ſed eum auferet proxima annotatio.*

XIX. Quӕrantur tres numeri, ita ut binorum multiplicatione productus, adēpta amborum ſumma, ſit quadratus. Hӕc quӕſtio ſimilis eſt prӕcedentis. Statuatur primus 1 N, ſecundus unitatum quotuis. & eodē modo in difficultatem inexplicabilem incidemus. Vt ergo multitudinem numerorum ad multitudinem numerorum habeamus ſub ratione quadrati ad quadratum, eò deuoluitur res, ut quӕrantur duo numeri, quorum unius in alterum multiplicatione factus, demta ipſorum ſumma ſit quadratus. ipſi autem ſimiles ſint quadratorum. Si numerus alterū quater, ternario demto continet: unitate utrinq; detracta, numeri erunt quadratorum ſimiles. Iam & hoc conſtat, ſi à quadruplis auferantur quadrupla, reſidua fore quadrupla: ac nimirum quadratorum ſimilia. Ponamus ergo primum 1 N † 1, ſecundum 4 N † 1. Quod fit ex uno in alterum, demta amborum ſummà, eſt 4 Q —— 1. id ӕquatur 4 Q † 4 —— 8 N, quadrato lateris 2 N —— 2. Fit 1 N, $\frac{5}{8}$. Ergo primus erit $\frac{13}{8}$. ſecundus $\frac{28}{8}$ ſeu $3\frac{1}{2}$. Atq; ita uni poſtulatorum ſatisfecimus. Ponamus nunc tertiū 1 N. huius in ſecundum multiplicatione quod fit, detracta utriuſq; ſumma eſt $2\frac{1}{2}$ N —— $3\frac{1}{2}$, ӕquale quadrato: is ſit 4. & illa per hunc multiplicata, fiunt 10 N —— 14. Rurſum quod fit tertio in primum ducto, ſi inde ipſorum ſumma auferatur, fit $\frac{5}{8}$ N —— $\frac{13}{8}$. ӕquale quadrato. is eſto 16. Et per hunc iſtud multiplicetur, fit 10 N —— 26. Interuallum huius producti & prioris, 12. Id componunt 2 & 6. quorum ſummӕ dimidium in ſe, facit 16. id maiori ӕquatur, qui erat 10 N —— 14. fit 1 N 3. is ergo eſt tertius, ſiue $\frac{24}{8}$. Primus $\frac{13}{8}$, ſecundus $3\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{28}{8}$. & ſoluitur his quӕſtio.

XYLANDRI.

*In Grӕco denominatores pperā omiſſi erāt, & alia deprauata, alia mutila, ut ex eorū cū noſtris comparatione*

*comparatione liquet. Instituamus examen. Primus in secundum producit $\frac{324}{64}$. summa ipsorum $4\frac{1}{8}$, id est $\frac{328}{64}$, inde ablata, superest quadratus $\frac{16}{64}$. Secundus in tertiũ gignit $10\frac{1}{2}$. aufer $6\frac{1}{2}$, summã eorũ, restat 4, quadratus. Tertius in primũ $\frac{49}{8}$ creat. summa ipsorũ $\frac{47}{8}$ inde subtracta, superest $\frac{2}{8}$, scilicet $\frac{1}{4}$, quadratus. Theorematis, quo autor utitur, itidem est euidens ratio. Sumamus 10 pro exemplo. Quis non uidet quater 10, —— 3, esse quater 9, † 1? Sic etiam nouies 12, —— 8, sunt nouies 11 † 1, &c. Alterum uel 19 quinti Euclidis demonstrauerit. Verùm heic obserua, nõ ipsos numeros similes quadratorum pro thesibus usurpari: sed eos, qui unitate aucti, tales fierẽt, quod etiam in superiore fuit factum propositione. Satis enim est pro instituta operatiõe, hoc nos consequi, ut numerus Q sit quadratus, ac proinde latus effingi possit, cuius adscito quadrato æquatio conficiatur. Variandi rationem ipsa theoremata, & eorum explicatio suprà allata ostendunt*

XX. Inueniantur duo numeri, quorum altero in alterum multiplicato, siue alteruter siue summa eorum producto adijciatur: fiat quadratum. Statuamus alterum 1 N, alterum 4 N —— 1. Nam si numero unitas desit ad conficiendum alterius quadruplum: productus ipsorum multiplicatione si adsciscat minorem, fit quadratus. Duo nunc restant. scilicet ut productus iste etiam altero, etiam summa amborum auctus, quadratum faciat. At cum altero facit 4 Q † 3 N —— 1, cum summa 4 Q † 4 N —— 1. quorum utrunq; æquatur quadrato. Est & heic oblata duplex æquatio. Interuallum est 1 N. quod conficiunt multiplicando 4 N & $\frac{1}{4}$. & fit 1 N, $\frac{65}{224}$. tantus est primus: secundus $\frac{36}{224}$. & postulatis quæstionis satisfaciunt isti.

XYLANDRI.

*Theorema, cui hæc innititur operatio, non de quadruplis tantum, sed etiam nouencuplis, sedecuplis, alijsq; rationem habentibus quadrato alicui cognominem numeris unitate destitutis uerum esse non modò experientia, sed & ratio ostendit. Cum enim quadrupli, nouencupli, &c. inter se sint similes quadratorum, & sua multiplicatione quadratum gignant: si 1 auferatur maiori, & per minorem multiplicetur residuus producto utiq; ad quadratum tot deerunt unitates, quot sunt in minores. Quadrupli 6 & 24. Ergo 6 in 23 si duco, & 6 addo producto, quadratus 144 integratur, exstiturus 6 in 24 ducto. Nouencupli 8 & 72. ergo 8 in 72 ducto, adiectisq; producto 8 fiet 576 quadratus, quem 8 in 72 procreasset. Ad duplicem æquationem quod attinet, 1 N interuallum scitè ex 4 N & $\frac{1}{4}$ multiplicando composuit, cum 4 Q essent abolendi æquando, qui sunt in utroq; numero. Summa (ut rudioribus seruiam) est 4 N † $\frac{1}{4}$. semissis 2 N † $\frac{1}{8}$. quadratus 4 Q † $\frac{1}{64}$ † $\frac{1}{2}$ N, æqualis 4 Q † 4 N —— 1. Abijce utrinq; 4 Q & $\frac{1}{2}$ N, & utrobiq; adde 1, erit æquatio $\frac{65}{64}$ || $\frac{7}{2}$ N. fit 1 N $\frac{65}{224}$. huius quadruplum $\frac{260}{224}$, si auferas inde $\frac{224}{224}$, scilicet unitatem, secundum relinquit $\frac{36}{224}$. Denominator in Græco temere est (ut plerunq; etiam aliàs) omissus in solutionis pronunciatione. Videamus autem an postulata impleantur. Qui fit ex $\frac{65}{224}$ in $\frac{36}{224}$, is est $\frac{2340}{50176}$. Heic denominatorem omittamus licet, utiq; quadratum: sed ut producto addere utrunq; datorum, & summam etiam ipsorum possimus: 65, 36, & summa eorum 101, multiplicentur per 224, ut in partibus eiusdem cum producto nominis exhibeantur fiunt autẽ, ubi singulis 2340 adieceris, 16900, 10404, & 24964. quadrati omnino, laterum 130, 102, 158. & satisfactum est postulatis.*

Multiplicium quadrato numero proprietas.

XXI. Duo numeri poscuntur, ut qui alterius in alterum multiplicatione producitur, siue alterutro, siue etiam summa amborum multatus, quadratus fit. Esto alter 1 N † 1. alter 4 N. Nam si numero quatuor unitates desint ad quadruplum alterius præstandum: qui fit multiplicatione alterius in alterum, maiore multatus quadratum præstabit. Restat ut productus iste minore etiam, etiam summa amborum detracta, quadratus relinquatur. at illic relinquuntur 4 Q † 3 N —— 1. heic 4 Q —— 1 N —— 1, utrunq; quadrato æquale. Interuallum 4 N. quem multiplicando componamus ex 4 N & 1: fitq; 1 N, $1\frac{1}{4}$. Ergo primus erit $2\frac{1}{4}$ secundus 5. & manifesta est demonstratio.

XYLANDRI.

*Theorema, cui innititur hæc operatio, causam habet facilè perspicuam. Nam de quocunque quadruplo numero auferas 4, de quocunq; nouencuplo 9, & sic deinceps: manebunt quadrupli, nouencupli, &c. non eiusdem, sed unitate multati numeri alicuius. Ergo residuo in*

*priorem*

*priorem ducto, ultra quadratū qui è quadruplis fieret, tot unitates prouenient, quot sunt in maiore. Verbi gratia 48 ad 12 est quadruplus. ab illo aufer 4, restant 44, non ad 12, sed ad 11 quadruplus. itaq; duodecies 44 (528) sunt quadratum è quadruplis 11 in 44 ducto, ac præterea 44. hoc est, duodecies 44, —— 44, sunt undecies 44. Item 63 ad 7 est nonencuplus. aufer 9, restat 54 non ad 7, sed ad 6 nonencuplus. septies ergo 54 (378) est quadratus è nonencuplis 6 atq; 54 procreatus, & 54 præterea. Porrò heic quoq; duplicata est æquatio: cuius tractandæ rationem superiore indicauimus problemate. Valor Numeri sic inuenitur. semissis interuallum componentium numerorum est 2 N † $\frac{1}{2}$. quadratus 4 Q † $\frac{1}{4}$ † 2 N æqualis 4 Q † 3 N —— utrinq; abiice 2 N & 4 Q, adde utriq; 1. erit æquatio $1\frac{1}{4}$ ‖ 1 N. Experiri lubet. Multiplica $2\frac{1}{4}$ per 5, habebis $\frac{45}{4}$. hinc aufer primum $\frac{9}{4}$, restat $\frac{36}{4}$ seu 9, quadratus. aufer secundum, $\frac{20}{4}$, de producto. restat $\frac{25}{4}$, quadratus. aufer summam amborum, $7\frac{1}{4}$ seu $\frac{29}{4}$ de producto, restat $\frac{16}{4}$ seu 4, quadratus. Multis modis posse hypostases mutari horum problematum, in aperto est.*

XXII. Poscimus quatuor numeros, ita ut quadratus qui à summa omnium tanquam latere fit, singulorum tam detractione quàm adiectione quadratus fiat. Cuiusuis trianguli rectanguli latus recto angulo subtensum, quadratum habet, quod siue ei addas siue adimas duplum eius quod fit è lateribus rectum angulum facientibus, maneat quadratum. Quero itaq; primum quatuor triangula rectangula, quorum hypotenusæ sint æquales. Hoc ipsum uerò aliud nihil est, quàm datum quadratum in quatuor quadratos partiri. Atqui didicimus datum quadratum infinitis modis in duos quadratos partiri. Nunc ergo duo exponamus triangula rectangula; quorum latera minimis explicentur numeris. ac sint 3, 4, 5: & 5, 12, 13. & utriusq; omnia latera per alterius subtensam multiplicemus: fient 39, 52, 65: ac 25, 60, 65. habemus ergo duo rectangula triangula, quorum æquales sint subtensæ. Porrò suapte natura numerus 65 bifariam in duos quadratos diuiditur: scilicet in 16 & 49, ac rursum in 64 & 1. quod ei contingit, quia continetur multiplicatione 5 in 13, quorum uterque in duos diuiditur quadratos. Sic expositorum 49 & 16 accipio latera 7 & 4, ac fingo triangulum rectangulum à numeris duobus, 7 & 4 scilicet. idq; erit 33. 56. 65. Similiter latera numerorum 64 & 1, sunt 8 & 1. à quibus effingo triangulum rectangulum, cuius latera 16. 63. 65. ita fiunt quatuor triangula rectangula, quorum hypotenusæ sunt æquales. Refero me nunc ad propositam initio quæstionem: ac summam numerorum quatuor, quos quæro, statuo 65 N: quemuis autem ipsorum quadruplū areæ, nota Q insignitū. primum 3696 Q, quartum 2016 Q. ac sunt quatuor isti in unam summam coacti 42768 Q, æquales 65 N, ac fit 1 N, * Nunc ad propositi partes. primus * & cætera. *

XYLANDRI.

*Quadrati in duos alios quadratos diuisionē docuit autor libri secundi propositionibus IIX, IX, X. Est autē oppidò elegans hæc quadratorum tractatio ad proprietatem orthogonij trianguli adiuncta, demanantem ex 47 primi Euclidis. In Græco scholiastes, & numeri Oedipum requirebant. Numeri 65 natura mirificè autor est usus, qui cum obscuriùs quædam dixerit, rudiores nostra adiuuemus agedum opella. Equidem 5 & 13 in duos utrunq; diuidi quadratos, uel hinc animaduerti poterat, quia uterq; est quadratum hypotenusæ in rectangulo. Non dubito autem quin ad theoremata de quadratis numeris alio opere (aut libris saltem ad nos non perlatis) exposita autor se retulerit, cū à lateribus 7 & 4, itemq; 8 & 1 iubet alios orthogonios fieri, quorum itidē sit hypotenusa utriusq; 65. Ingenio heic & ocio me superantibus gloriam rei perobscuræ explicandæ integram libenter relinquo atq; defero. Dicam tamē nonnihil etiam ipse pro meo modulo. Oportet causam esse utiq; aliquā, cur alij duo possint ultra priores dati trianguli orthogonij, in numeris non surdis (quos uocamus) sed ueris, quorum itidem hypotenusa utriusque sit 65. nam de prioribus minimè est mirum: cùm latera orthogonij omnia eodē multiplicata numero constet minimè cōditionem iusq; suum mutare, & hypotenusa utrobiq; eadem fiat alteris lateribus per 5, alteris per 13 multiplicatis. quod quale sit, uel ex decimasexta VII Euclidis, atq; adeò communi (ut dicitur) sensu liquet. Sunt ergo trianguli orthogonij latera cum hæc, 39. 52. 65. tū hæc 25. 60. 65. Sed unde nobis reliqui isti 33. 56. 65. item 16. 63. 65. prodierunt? Primùm quod de 65 bifariā in duos quadratos partiendo dictum est ab autore: id neq; uulgare est, & ex dictis*

*libri*

*libri secundi propositionibus, ibiq́. annotatis deprahendi potuit. Sed qui hoc ad præsentem congruat, minimè est in promtu uidere. quo, inquam, pacto constet adminiculo laterum 7 & 4, item 8 & 1, nouos orthogonios procreari, quorum hypothenusa utriusque sit exactè 65. Quando Diophanteis heic destituimur theorematis, nostram penum excutiamus. Est enim à nobis quadratorum mira rimantibus, inter alia etiam hoc obseruatũ. Quã duorũ numerorũ quadrati summã conficiunt: eius summæ quadratus constet rursum è duobus quadratis, quorum alterius latus sit numerus, qui relinquitur quadrato minoris datorũ de quadrato maioris detracto. alterius latus ipsum se prodit. Etenim altero detracto quadrato, semper quadratus fiet reliquus. Demonstrationem heic nihil attinet tractare. agemus id suo, ut speramus, loco. Exemplis saltem declaremus. Numeri 2 & 3. summa quadratorũ 13. huius quadratũ 169. Numerorũ quadrata 4 & 9, interuallũ 5. Ergo latus quadrati alterius 5, alterius 12. nã 25 de 169 subductis relinquitur 144, quadratus lateris 12. Aliud. Numeri 3 & 5. summa quadratorũ 34. huius quadratũ 1156. datorum quadrati 9 & 25 interuallo distãt 16. huius quadratus 256 de 1156 ablatus relinquit 900, cuius latus quadrati est 30. Deniq. 7 & 10 dati. eorum quadrati 49 & 100. summa horũ 149: & eius quadratus 22201. quadratorũ differentia 51. huius quadratus 2601, subtractus à 22201, relinquit 19600 quadratũ, cuius latus 140. His ita cõstitutis, cùm cõstet quadratorũ de 7 & 4 summã conficere 65: quærãtur aũt duo numeri, quorũ quadratorũ summa, summã quadrati de 65, hoc est 4225, æquet: (ob* XLVII *primi Euclidis) 16 de 49 aufero, minoris quadratũ de quadrato maioris, relinquitur 33 unũ latus rectũ includentiũ. cuius quadratus 1089 de 4225 quadrato hypotenusæ subtractus, relinquit 3136, cuius latus 56 est alterũ rectũ includentiũ latus, manente hypotenusa 65. Eadem prorsus ratione per numeros 8 & 1 inueniuntur latera 63 & 16.*

Theorema de quadratis.

Canon. *Nã aliud nihil fit, quàm quod minoris datorũ à maioris datorum sublato quadrato, unũ trianguli habetur iã latus: alterũ ex doctrina theorematis de orthogonio absoluitur. Quæ sequuntur apud Diophantũ, ita sunt mutilata & corrupta, ut ijs corrigendis metuerim ne oleũ atq. operã perderẽ, adeoq́. laterẽ lauarẽ. Cõsideremus Diophãti theorema de rectangulo triangulo. Duplũ eius quod fit ex uno rectum angulũ includẽtium in alterũ, est omnino quadruplum areæ trianguli: ut ex* XLI *primi Euclidis notißimũ esse debet. Ergo quadruplum illud areæ, seu duplum parallelogrãmi rectanguli, quod laterib. cõtinetur rectũ includẽtibus, in singulis quatuor iã inuentis rectangulis hanc obtinebit uim, ut quæstionẽ cõmodißimè poßimus explicare. Nam summam quatuor horũ numerorum ponemus 65 N, erit eius quadratus 4225 Q. Numerorum primus esto duplum eius quod fit basi in cathetum multiplicata, uel quadratus areæ, puta 4056 Q in triangulo primo, eorum quorum hypotenusa sit 65. compositus ex 39 in 52 multiplicato, & producto duplicato: hoc est ex 39 N in 104 N, aut 78 N in 52 N. Cõstat autẽ ex theoremate proposito, 4056 Q uel addita uel ademta 4225 quadratis, exhibere quadratũ 8281 Q aut 169 Q, quorũ latera 91 N & 13 N. Eadẽ lege, ijsdẽ pactis pro area quadruplis, triangulorũ secundi ponẽtur 3000 Q. tertij 3696 Q. quarti 2016. Tũ est ista explorare: omnia consentanea inuenies. Atqui summa horũ quatuor numerorum, exactè postulatis alioqui respõdentium, nõ est 65 N, sed 12768 Q. hæc ergo æquãtur. & fit 1 N,* $\frac{65}{12768}$. *Ergo per hũc radicis ualorẽ hypostases nostræ sunt resoluẽda. Quadratus fiet* $\frac{4225}{163021824}$ *(primi enim sunt et laterũ, & porrò etiã quadratorũ numeri) habes summã omniũ, quæ est 1 Q. Quãti porrò sint quatuor hi 4056 Q, 3000 Q, 3696 Q, 2016 Q, numeri qui quærebãtur quatuor, utq. perfectißimè satisfaciãt postulatis propositi problematis, expertus sum: statueramq. adeò huc adscribere. Sed si te piget multiplicãdo et radices quadratas extrahẽdo nos, q glaciẽ secuimus, subsequi: dignus nõ es, propter quẽ exscribẽdi tam bonum cifrarum numerum labore uel famulum nostrum oneremus. Demonstrata ergo est solutio. tu lacunas relictas tuo labore complebis, & Diophantum ac interpretem de isto pulcerrimo subtilißimoq́. problemate amabis. Cætera uide ad propositionem 8 quinti. Et alia ad primam sexti & sequentes*

XXIII. Datum numerum partiemur in duos, & inueniemus quadratum aliquẽ qui demta utraq; parte diuisi, sit quadratus. Sit datus numerus 10. Quadratum qui reperiatur, pono 1 Q † 2 N † 1, qui siue ei 2 N † 1 adimas, siue 4 N, manebit quadratus. Erit ergo primus 2 N † 1, secundus 4 N. summam horum oportebat esse 10, at est 6 N † 1. ergo hac æquatione proditur 1 N, $1\frac{1}{2}$. Erit itaq;, si proposito insistamus, alter 4, alter 6. & quadratus de quo agebatur $6\frac{1}{4}$.

XYLANDRI.

*Nã 4 & 6 sunt 10 utiq. Si 4 auferas de $6\frac{1}{4}$, supersunt $2\frac{1}{4}$ quadratus. Si 6, $\frac{1}{4}$ superest, quadratus ipse etiã. Caeterùm si de 1 Q † 2 N † 1 auferas 4 N, manebit eius residuum 1 Q —— 2 N † 1, quadratus lateris 1 N —— 1. ut binomium quadratus erat lateris 1 N † 1. Poterat autẽ quouis alio quadrato uti. Sit enim 1 Q, à quo si uel 2 N —— 1, uel 4 N —— 4 auferas, quadrati relinquentur 1 Q —— 2 N † 1 & 1 Q —— 4 N † 4. Summa partiũ 6 N —— 5, aequalis 10. fit 1 N $2\frac{1}{2}$, &c.*

XXIV. Propositũ numerũ partiemur in duos, & inueniemus quadratũ ita ad has partes aptũ, ut utrãlibet ei addideris, quadratus fiat. Sit diuidẽdus 20. quadratũ sumemus 1 Q † 2 N † 1. Huic siue 2 N † 3, siue 4 N † 8 addas, quadratus fiet. Hi ergo sint partes diuidẽdi. & eorũ summa, quae debuit esse 20, fit 6 N † 11. Erunt ergo partes diuisi 6 & 14. quadratus autem $6\frac{1}{4}$. & euidens est demonstratio.

XYLANDRI.

*Fit enim 1 N, $1\frac{1}{2}$. & hoc precio aestimantur reliqui. 1 Q est $\frac{9}{4}$. 2 N sunt $\frac{12}{4}$. 1 est $\frac{6}{4}$. summa $\frac{25}{4}$. Porrò 6 & 14 sunt 20. & ad utrunq. adiectus $6\frac{1}{4}$ quadratus, quadratos cõflat $12\frac{1}{4}$ & $20\frac{1}{4}$. Si sumsisses loco quadrati, 1 Q, huic siue 2 N † 1, siue 4 N † 4 addas, fieret quadratus. summa partium sic positarum 6 N † 5 aequalis 20. Fit 1 N $2\frac{1}{2}$. Quadratus $6\frac{1}{4}$, numeri partes itidem 6 & 14, &c.*

# DIOPHANTI ALEXANDRINI RERVM
## ARITHMETICARVM LIBER QVARTVS.

*Guilielmo Xylandro Augustano interprete.*

1 Datũ numerũ diuidemus in duos cubos, quotũ laterũ summa datur. Numerus 370, laterũ summa 10. Statuo latus alterius cubi 1 N † 5. relinquetur latus alterius 5 —— 1 N. fit summa cuborũ 30 Q † 250, aequalis 370, dato numero. fit 1 N, 2. Ergo, iuxta praescriptum quaestionis, latera cuborũ 7 & 3, ipsi cubi 343 & 27.

XYLANDRI.

*Numeri erãt in Graeco uitiati, & quidã codici alleuerat λ esse λωψιν. reduuiã scilicet curaturus. Haec quaestio cõpendiosè signorũ † & —— cõmissione repetito ualdè elegãter ab autore ita soluitur, ut simplex aequatio fiat, neq. in cõnexas tractatio excidat. Et libet in gratiã tironũ formulas multiplicationum quibus duo cubi datorum laterum conficiuntur, oculis subycere.*

| | |
|---|---|
| 1 N † 5 | 5 —— 1 N |
| 1 N † 5 | 5 —— 1 N |
| † 5 N † 25 | —— 5 N † 1 Q |
| 1 Q † 5 N | 25 —— 5 N |
| 1 Q † 10 N † 25 | 25 —— 10 N † 1 Q |
| 1 N † 5 | 5 —— 1 N |
| † 5 Q † 50 N † 125 | —— 25 N † 10 Q —— 1 C |
| 1 C † 10 Q † 25 N | 125 —— 50 N † 5 Q |
| 1 C † 15 Q † 75 N † 125. | 125 —— 75 N † 15 Q —— 1 C. |

*Hi cubi iam sunt addendi. uides autem ut ab altera parte 1 C & 75 N, horum ab altera parte defectum compensent. itaq. ijs mutuò peremtis, summa fit 30 Q † 250, aequalis 370. & utrinq. reiectis 250, 30 Q aequantur 120. ergo 1 Q est 4. proinde 1 N, est 2. & omnia facillimè expedita. Quod si uulgatam secutus rationem, posuisses latera 1 N & 10 —— 1 N, horum cubos inuenisses 1 C & 1000 —— 300 N † 30 Q —— 1 C. ergo summa fuisset 1000 —— 300 N † 30 Q, aequalis 370. Primùm si addas utrinq. 300 N, & adimas 370, erit aequatio inter 630 † 30 Q & 300 N. hoc est, quadratis seorsim (ut fit in hoc genere) consideratis, 30 Q & 300 N —— 630. ac denique omnibus numeris per 30 diuisis, 1 Q aequabitur 10 N —— 21. ut ex hoc connexo quaerenda sit radix quadrata. quod genus aequationis in sextam Christiferi Rodolfi regulam incidit. & 1 N, fit uel 7 uel 3. hoc est utrunq. ut ex quinta secundi Euclidis alio loco est demonstratum*

II. Den-

II. Dentur duo numeri tanto quanto poscitur nnmero differentes, ita ut cuborum quoq; id sit quod præscribitur interuallum. Sit adeò ipsorum differentia 6, euborũ 504. Pono maioris cubi latus 1 N † 3, ut minoris sit 1 N —— 3, & horũ interuallũ 6. Restat ut etiam cuborũ interuallũ sit 504. At quo maior minori præstat, est 18 Q † 54. hoc ergo æquatur 504. fit 1 N, 5. Itaq; secundum posita, latus maioris cubi, 8, minoris 2. Cubi ipsi 512 & 8, ac demonstratio euidens.

XYLANDRI.

*In Graco heic quoq; mutilata erat propositio. Cæterùm eodẽ rursum cõpendio usus est autor, ut contineret se intra æquationẽ simpliciũ septa. Fiunt enim cubi numerorũ positorum 1 C † 9 Q † 27 N † 27 maior, & minor 1 C —— 9 Q † 27 N —— 27. de his 1 C & 27 N utrinq; detractis, nihil relinquunt, & negatiuum signum ostendit —— 9 Q ac —— 27 non debuisse detrahi. adduntur ergo ad reliquos 9 Q ac 27, & fit cuborũ interuallum 18 Q † 54 æquale 504. & utrinq; resectis 54, 18 Q æquantur 450. fit 1 Q 25, ergo 1 N est 5. Quod si, ut solet aliàs, latera posuisses 1 N & 1 N † 6: cubos procreasses 1 C minorem, 1 C † 18 Q † 108 N † 216. unde minore abiecto, residuum 18 Q † 108 N † 216 æquaretur 504, ac tandem 1 Q esset 16 —— 6 N, quæ est quinta Christiferi, & 1 N fit 2, latus minoris cubi, 8 maioris.*

III. In quadratum numerum, & in latus eius multiplicabimus alium quendam, ita ut è latere cubus, è quadrato latus eius cubi fiant. Quadratus statuatur 1 Q, erit latus eius 1 N. Qui autem in hos ducitur, sit numerus unitatum cuiuscunq; cubi, ac sit sanè 8. Eum si in 1 Q ducamus, 8 N: si in 1 N, 8 inueniemus. Atqui debent 8 N esse latus cubicum cubi 8. id uerò est 2. ergo 2 æquatur 8 N. & fit 1 N, $\frac{1}{4}$. Ad rem ergo, erit quadratus $\frac{1}{16}$, latus $\frac{1}{4}$, & is qui in horũ utrũq; ducitur, 32. demonstratio patet.

XYLANDRI.

*Heic cùm in Græco mirificè omnia sint confusa, usus sum mea in uertendo libertate, & bona fide rem ipsam tradidi, quã è uerbis autoris elicere uix potui. In ipsa propositione inter ἀριθμὸν & πλευρὰν deerat καὶ αὐτ. πολλαπλασιαζόμενος.) idem enim fit siue multiplicet, siue multiplicetur, per decimãsextã 7 Euclidis. legi autem insequẽtia μονάδων ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν ὅστις δή ποτε. ἔστω δὲ ἡ. nam signum Numeri male heic fuit insutum. Quot autem 8 in 1 Q dicit creare 8 N, & 8 in 8 N creare 8 absolutum: id depressioni signorum, seu deminutioni est acceptũ ferendum: fiebãt enim 8 Q & 8 N. Illa aũt καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ῶ, & cætera usq; ad ὁ ἀριθμὸς δ', uitiosa sunt. hoc omnino fit ut $\frac{1}{4}$ sit Numerus, quadratus $\frac{4}{64}$, & multiplicãs utrunq; 32. itaq; etiã rectiùs latus simplicissima minutia exprimitur $\frac{1}{4}$, & quadratus $\frac{1}{16}$. Horũ utrunq; si multiplicat 32, (nam 8, cubus assumtus, per 4, denominatorem 1 N, multiplicatus tantum facit) gignit 8 & 2. & (quod imperabatur) productus à quadrato latus est cubicum eius, qui à latere quadrati fuit productus. Quàm generalis sit hæc operatio, experiendo facilè senties.*

IV. Quadrato & lateri eius eundem adijciemus numerum, ut summæ idem sint. Pono pro quadrato 1 Q, cuius latus 1 N. Vtriq; addendus sit tot quadratorũ, ut cũ 1 Q coniuncti, quadratum faciant. ac sit 3 Q. Is adiectus 1 Q, fit 4 Q: ad 1 N, facit 3 Q † 1 N. atqui hoc æquatur 2 N, nimirum lateri de 4 Q. fit 1 N, 1. ergo quadratus est 1, latus 1, addendus 3.

XYLANDRI.

*Ne hoc quidem constat. Propositio in Græco est perobscura. ποιεῖν τὰ αὐτά. & solutio operationi non congruit. Nam ex solutione apparet τὰ αὐτὰ significare, debere summas eundem esse numerum: sicut 3 utriq; unitati additus 4 facit, qui numeri in Græco perhibentur. Atqui in operatione ostendit eo quod sit coniunctis addendo & latere, latus confici debere quadrati, quod ex addendo & quadrato sumto componitur: neque profectò 4 latus est quadrati 4. Immò æquatio hæc 3 Q † 1 N || 2 N, facit 1 N non 1, sed $\frac{1}{3}$: cùm utrobiq; tollatur 1 N, & 3 Q æquentur 1 N, hoc est 3 N æquentur unitati. Erit ergo ad hypostases si referamus, 1 Q, $\frac{1}{9}$. latus eius $\frac{1}{3}$. addẽdus 3 Q, hoc est $\frac{3}{9}$ seu $\frac{1}{3}$. Is quadrato additus $\frac{4}{9}$ facit: ad latus $\frac{1}{3}$ additus, $\frac{2}{3}$. & uerò $\frac{4}{9}$ sunt latus numeri $\frac{2}{3}$. Ergo τὰ αὐτὰ intelligendũ ita est, ut summa quæ est additi & quadrati, latus sit summæ additi & lateris: hoc est, additione hac rursum quadratus & eius latus conficiantur. Proinde etiam numeri quæstionem soluentes mutandi, & sic legendum esset. γίνεται ὁ ἀριθμὸς*

*h a μονάδος*

*μονάδος τρίτον. ἐπὶ τῆς ὑποστάσεως, ἴσαι ὁ μὲν τετράγωνος, θ΄ ἀπὸ, ἡ δὲ πλευρὰ τρίτων, ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς τρίτον.* *Hoc autem problema generale est, & hanc requirit duntaxat cautionem, ut addendus numerus cum quadrato constituat quadratum. Ponamus quadratum 9 Q, latus eius 3 N. addendum 7 Q. Hic cum 9 Q, facit 16 Q, cuius latus 4 N. ei aequatur altera summa, 3 N † 7 Q. hoc est 1 N fit $\frac{1}{7}$. Examen. 9 Q, sunt $\frac{9}{49}$, latus $\frac{3}{7}$, addendus $\frac{7}{49}$ seu $\frac{1}{7}$. huc adde ad $\frac{9}{49}$, habes $\frac{16}{49}$. cuius latus est $\frac{4}{7}$. ac tantum fit si $\frac{1}{7}$ ad $\frac{3}{7}$ addas, ut uult problema. Hoc modo positis 4 Q. 2 N. fit addendus uel 5 Q, uel 12 Q. uterq; enim congruit. inuenies $\frac{4}{25}$ quadratū. $\frac{2}{5}$ latus, $\frac{1}{5}$ addendum, uel $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$. & canonem fabricari ex ipsa operatione licet, quo expeditè semper hae hypotheses resoluantur. Variari etiam positiones posse infinities, me tacente experientia & ratio te monebunt.*

V. Quadrato eiusq; lateri idem adijciendus est numerus, ita ut uicissim summa additi & lateris quadratus sit: & latus eius sit summa dati quadrati additiq; numeri. Sit quadratus 1 Q, latus ergo 1 N. addendum pono aliquot Q, quorum unitates sint quadratus numerus, deficiente tamen 1 N. ac fit addendus 4 Q —— 1 N, ergo is lateri 1 N adiectus, summam facit quadratam, puta 4 Q. eius latus 2 N. huic aequari debet summa quadrati positi, & addendi: quae est 5 Q —— 1 N. fit ergo 1 N, $\frac{3}{5}$. & ad positiones eo relato, fit quadratus $\frac{9}{25}$, latus $\frac{3}{5}$, addendus $\frac{21}{25}$.

XYLANDRI.

*Multa heic sunt incommoda, proposittio quaestionis obscura admodum, τὰ ἐναλλὰξ (sic enim legendum, ut & infrà, non τὰς.) quod pluribus uerbis interpretatus sum, quia in sequentibus aliquoties repetitur problematibus. Mutila ipsa operatio, & deprauata. quam ego integram dedi. numeri solutionis perperam denominatoribus spoliati, addendus etiam uitiosè κδ´ scriptus, pro κα´ εἰκοστόπεμπτα. Expediuimus tamen nos, & ueros numeros omnes posuimus. Positionis 4 Q —— 1 N facile est rationem peruidere. nam —— 1 N compensatur 1 N in additione. & 4 oportet quadratum esse cùm de eius radice res sit. Aequatio etiam prompta est. Addendus est 4 Q —— 1 N, scilicet cùm 1 Q sit $\frac{9}{25}$, ipse erit $\frac{36}{25}$ —— $\frac{15}{25}$, hoc est $\frac{21}{25}$. Is ergo cum latere positi quadrati, id est cum $\frac{3}{5}$ coniunctus, summam conflat $\frac{36}{25}$, cuius latus $\frac{6}{5}$. idem addititius si ipso quadrato adiungatur, fiunt $\frac{30}{25}$, quod ipsum planissimè est $\frac{6}{5}$. Si libuisset, quadratum posuissemus 9 Q, aut 16 Q, &c. & latere posito uero, 3 N aut 4 N, &c. addendum licuit ponere 49 Q —— 3 N, uel 25 —— 4 N, &c. nolo enim persequi haec, cùm facilia sint.*

VI. Cubo & quadrato eundem adijcere quadratum, ut rursum cubus & quadratus eodem ordine exsistant. Esto cubus 1 C, quadratus quotcunque Quadratorum unitatum numero quadrato, uerbi gratia, esto 9 Q. Iam cùm quadratus sit inueniendus, qui ad 9 Q adiunctus, quadratum faciat: duos statuo numeros, quorum altero in alterum ducto producatur 9. ut sunt 1 & 9. aufero 1 de 9, & reliqui semissem in se duco, fit 16. qui adiunctis 9, quadratum facit. Pono ergo quadratum qui addendus illis est, 16 Q. is ad 9 Q additus, quadratum conficit. Idem ad 1 C additus, facit 1 C † 16 Q. quod aequatur cubo. Is sit 8. Erit 1 N, 16. Iam ad praescripta hoc accommodemus: erit cubus 4096, quadratus 2304. quadratus utriq; addendus 4096.

XYLANDRI.

*Ita planè est in Diophanto. Sed longè secus habet res. Nam si aequatio inter 1 C † 16 Q & 8 statueretur, uix, aut ne uix quidem explicari posset, cum tres species aequatio haec contineret, nō paribus distantes interuallis. Numeros quoque, quibus quaestio soluitur, statim corrigemus. Nā ubi legitur, ἴσα κύβῳ. ἴσω τῷ η̅. legendum est ἴσω κύβοις η̅. ut 1 C † 16 Q aequetur 8 C, hoc est 16 Q aequentur 7 C: uel deminutis (ut par est) characteribus, 16 aequentur 7 N. Ita 1 N fit non 16, sed $\frac{16}{7}$. nam denominator heic perperam omissus, uitiat totam rem. Iam ad postulata quaestionis accedamus. 1 N est $\frac{16}{7}$. ergo 1 Q est $\frac{256}{49}$. & 1 C est $\frac{4096}{343}$ (non ergo δω̅ ϛϛ scribi debuit, sed δ ϛ ϛ τριακοσιοστοτεσσαρακοστότριτα.) Habemus ergo cubum de quo agitur. Quadratus erat 9 Q, is ergo est $\frac{2304}{49}$ (heic rursum denominator pessimè est praeteritus.) Addendus erat 16 Q, hoc est $\frac{4096}{49}$ (in Graeco idem uitium.) Vt experiamur uerè nos satisfecisse quaestioni, addamus $\frac{4096}{49}$ ad $\frac{4096}{343}$. illis in $\frac{28672}{343}$ conuersis, summa confit $\frac{32768}{343}$, omnino cubus, cuius cubicū latus est $\frac{32}{7}$. Rursum $\frac{2304}{49}$ & $\frac{4096}{49}$ addita, quadratum conficiunt $\frac{6400}{49}$, cuius latus quadratum sit $\frac{80}{7}$. Est ergo rectè*

*rectè soluta quæstio. Quod aũt heic traditur cõpendium de inueniẽdo quadrato qui ad datum quadratũ (aut etiam alium quẽuis numerum) additus quadratum cõflet: ex his est desumtum, quæ suprà sunt exposita lib. II. propos.* XXXV.

VII. Cubo & quadrato adijciemus unum eundemq; quadratum, ut eadem quæ suprà, uerùm inuerso fiant ordine. Sit cubus primo, quadratus secũdo, his adijciendus quadratus tertio loco. Et quoniã uolo additũ quadratũ adijciendũ ad quadratũ datũ, facere cubũ: faciat cubũ primũ: itaq; primus secundũ tertio superat, nimirũ quadrato. tertius. n. est quadratus. Iã quoscũq; duos numero posuero, eorũ quadrati cũ duplo eius quod ex uno in alterũ fit, quadratũ facient. Debeo itaq; expositis duob. numeris, pro summa quã eorũ quadrati faciunt, ponere unitatẽ: quoniã unitas æquatur duob. quadratis, ei quod quæritur & ei quod adijcitur, qui sunt secundus & tertius quadrati. duplũ eius quẽ producũt 3. & est 3 quadratus. itaq; etiam duplũ eius quẽ producũt, est quadratus. Statuo itaq; numeros hos 1 N & 2 N: ut duplũ eius quẽ alter in alterũ ductus producit, sit quadratus. Horũ itaq; sumtis quadratis, primũ statuo 5 Q, tertiũ 4 Q, duplũ eius ꝙ fit ex uno in alterũ. Erit ergo secũdus 1 Q, ut cũ secũdo fiat æqualis primo. Restat ut primus sit cubus. ergo 5 Q ęquãtur 1 C. facit 1 N, 5. Ad postulata quęstiõis hoc aptemus. Erit cubus, primus scilicet, 125. quadratus, qui secũdũ obtinet locũ, 25. quadratus his adijciendus, tertio loco positus, 100. & euidens est demonstratio. *

XYLANDRI.

*Videbatur heic Delio opus esse natatore, adeò & perplexa & uitiata est explicatio. Quæstio quidẽ planißimè soluitur. Nã 125 & 100 faciunt quadratũ 225: 100 & 25 faciũt cubũ 125. id est, quadratus additus cubo quadratũ, quadrato cubũ facit, ut postulabatur. hoc enim est ἐναλλὰξ respectu præcedentis problematis. & positis primo in ordine 5 Q, secundo 1 Q, tertio 4 Q, si 1 N sit 5: omnino primus 125, secũdus 25, tertius 100 fiunt. Interim qui secundi & tertij summa 5 Q, cubũ efficiat, nõ explicatur. ἀριθμὸν Λ μίξοι, palàm est falsum, ut et illa ἃ ἐστι γ' τετράγωνος. & μετὰ γὰρ τοὺς τρεῖς. in primo Λ abundat. secundũ perperã est inculcatũ. pro tertio legẽdũ μετὰ γὰρ τοῦ δευτέρου. Res ita habet. Tertius cũ primo quadratũ, cũ secũdo cubũ debet conficere. Ponit itaq; autor cubũ, qui est primus, æqualẽ esse duob. quadratis, dato scilicet & adijciendo. Eos aũt quadratos beneficio quartæ secũdi Euclidis sic cõparat. Latera eorũ ponit 1 N & 2 N. horũ quadrati 1 Q & 4 Q sunt 5 Q. duplũ eius quod uno in alterũ multiplicato producitur, est 4 Q. quod si ad 5 Q addas, fit quadratus 9 Q. Habes cur primũ 5 Q, tertiũ 4 Q ponat: hũc enim esse oportet quadratũ è tenore quæstionis. ideoq; his potißimùm usus est numeris. & quia secundus cũ tertio primũ æquare ponũtur, relinquitur mediũ esse 1 Q. restabat ergo, ut secũdi & tertij summa primus esset cubus. ergo 1 cubo eam æquat, &c.*

IIX. Aliter. Sit cubus primo, datus quadratus secũdo, additicius quadratus tertio loco. Volo ut hic secundo additus, cubũ efficiat qui est primus. itẽ ut primus tertio additus, faciat quadratũ. Eò itaq; loci res deducta sit, ut quærẽdi sint duo quadrati, quorũ summa cũ altero ipsorũ cõiũcta quadratũ exhibeat. ideoq; cũ duo quadrati, datus nẽpe & adiectiticius, primũ efficiãt cubũ: ponamus alterũ 1 Q, alterũ 4. summa eorũ cũ priore, 2 Q † 4. cui æquabimus quadratũ lateris 2 N — 2, qui est 4 Q † 4 — 8 N fit 1 N, 4. Ergo ponemus tertiũ eorũ de quib. agĩ numerorũ esse 16 Q, secundũ 4 Q. ergo primus summa horũ, 20 Q Aequãtur ergo 20 Q uni cubo. & fit 1 N, 20. Est ergo primus 8000, secũdus 1600, tertius 6400. Atq; hoc modo infinities licet quęstioni satisfacere.

XYLANDRI.

*Nã cùm quadrati quærantur, alter 4 Q, 9 Q, &c. alter 4, 9, 16, &c. poni potuit ꝑ libito. Sed autor in minimis more suo substitit. In Græco δυνάμεων δ Λ ἀριθμῶν η est mutilatè. scribendum δυνάμεων δ, μο δ, Λ ἀριθμῶν η. Cur latus finxerit 2 N — 2, in promptu est, nimirũ ut exsisterẽt 4 unitates, quæ — 2 abolerẽt. ita enim Q & N deinde æquãtur: 2 Q || 8 N. & fit 1 N, 4. Primus numerus η, scribi debet, nõ η β. Cæterùm 8000 cubũ, reliquos quadratos esse liquet, & 6400 ad 8000 additus, facit quadratum 14400. ad 1600, cubum 8000.*

IX. Cubo & lateri eius eundem adijciemus numerũ, & rursum cubus ac latus eius exsistent. Sit addẽdus numerus, 1 N latus cubi, Numerorum quotlibet. sit ergo 2 N. Ergo cubus est 8 C. Iam 1 N, si addas ad 2 N, fit 3 N. si ad 8 C, fit 8 C † 1 N. Ergo 8 C † 1 N æquatur 27 C. aufer utrinq; 8 C. Ergo 19 C æquantur 1 N, uel ( deminutis unitate

numeris characterū) 19 Q æquant 1. Est aūt unitas, numerus quadratus. & si 19 quoq; Quadratorū numerus, quadratus esset: explicari iā ac solui æquatio potuisset. Sed 19 Q pueniūt ab excessu, quo 27 C. superāt cubos 8. horū latus 2 N, illorū 3 N erat. Atqui 2 N ponebātur, & 3 N fiebat, cùm semper addēdus 1 N facit Numerorū lateris cubici multitudinē unitate ampliorē. Eo itaq; res redijt, ut quærēdi sint duo numeri unitate differentes, quorū cubi inter se distent, quadrato numero. Hos pono 1 N, & 1 N † 1, quorum cubi differunt 3 Q † 3 N † 1. hoc æquabimus quadrato, cuius latus sit 1 —— 2 N. fit 1 N, 7. Iā ad postulata proposita hoc si cōferamus, numeri erūt 7 & 8. Redeamus ad id quod propositū fuit initiò. Statuo numerorū qui adijciendus est 1 N, latus cubi 7 N. erit ergo cubus 343 C. & 1 N. Si utriq; adijciatur, facit illū 8 N, hūc 343 C † 1 N. atq; hic debet esse cubus, cuius latus sit 8 N. Proinde 512 C æquabuntur 345 C † 1 N. & fit 1 N, 1. Ad propositū. Cubus erit 343, latus 7, numerus addēdus, 1.

Cubi quadrato distantes.

XYLANDRI.

*Sic in Græco est. nisi quod aperta mēda hæc ιθ' δυ ἢ τετράγωνος, καὶ τοῦτο τῶν ἀριθμῶν, καὶ κύβων πλευρὰς ἔχοντα: uel cæcus uideat esse pro ιθ' δυνάμεων ἢ τετράγωνος, καὶ τῶν τεθέντων ἀριθμῶν, ac κύβον, πλευρὰν ἔχοντα. Itē post ἀριθμῶν γ' μο, defuit α. Sed solutio quæstiōis palā est falsa. nā si 1 ad 343 & ad 7 addas, habebis 344 & 8, quorū hoc latus illius cubicū esse qui possit, cū 344 nō sit cubus. Certè si 512 C æquātur 343 C † 1 N; fiet ut 169 C æquētur 1 N: & deminutis characterib. 169 Q æquētur unitati. Ergo 1 N erit $\frac{1}{13}$. latus nimirū quadrati 169, diuidet unitatē: ut Algebrici canones exigūt: & nos alibi ostēdimus. Atq; sic uera quæstionis solutio exstabit. Nā 1 N, si sumimus $\frac{1}{13}$. erit latus cubi ex hypothesi posteriore $\frac{7}{13}$. cubus aūt $\frac{343}{2197}$. Huic si addas $\frac{1}{13}$, hoc est $\frac{169}{2197}$, cōficiētur $\frac{512}{2197}$ cubus rursum, cuius latus cubicū $\frac{8}{13}$. ac tantundē fit si priori lateri, quod erat $\frac{7}{13}$, addas $\frac{1}{13}$. uides quid sit denominatores, maximè diuersos, omittere. quod passim euenit Græcis, quia cifris nō utūtur, & minutias seu fractos numeros (ut uocātur) nō eo modo, quo nos, scribūt: sed denominatores supernè notant. qui sæpè aut uitiantur, aut planè negligūtur ab imperitis.* Quorū cubi inter se distēr.) *Vt totū hoc problema sit explicatius, formulā subijcio. Hinc 1 C abijce. ut habeas cuborū differētiā, quæ exstat in cōtextu. Cui æquetur quadratus, callidè eius latus fingitur 1 —— 2 N, cuius quadratus 4 Q † 1 —— 4 N fiat. Sic.n. unitas utrinq; abijci potest, itēq; 3 Q & utriq; addūtur 4 N, itaq; fit æquatio inter 1 Q & 7 N, siue 1 N & 7. Est ergo 1 N, 7. Non inelegās est hoc problema. sed euitendū mihi in eo interpretādo fuit aduersus librariꝝ, inscitiā dicā an oscitantiam?*

*1 N † 1*
*1 N † 1*
*quadratus. 1 Q † 2 N † 1*
*1 N † 1*
*† 1 Q † 2 N † 1*
*1 C † 2 Q † 1 N*
*1 C † 3 Q † 3 N † 1*

x. Cubo eiusq; lateri addemus eundem numerum, ut eadem quæ erant, in uerso fiant ordine. Esto cubus quotcunq; unitatum cubicarum. ac esto 8. erit latus eius 2 N, hoc est latus cubi 27 —— 2 N. & si numeris 2 N addantur, fiunt cubi 27. & est cubus à latere 3 N. quod si cubis 8 adijciantur, faciunt 35 C —— 2 N. Hoc uolumus esse latus cubicum de 27 C, quod est 3 N. Ergo 35 C —— 2 N æquatur 3 N. fiunt 5 N æquales 35 C. Ergo deminutis characteribus 35 Q æquantur 5. Non potest autem æstimatio 1 Numeri explicari, propterea quòd species ad speciem non habet rationem quadrati ad quadratum. Enimuerò 35 illi Q summa sunt cuborum 27 & 8. 5 autem summa laterum ex quibus illi fiunt. Res itaque in eum est deducta locum, ut inuenire duos cubos oporteat, quorum summa ad summam laterum ipsorum rationem habeat quadrati ad quadratum. Sit summa laterum, quotquot libuerit unitatum. ac sit sanè 2. sitq; unius cubi latus 1 N, erit latus alterius 2 —— 1 N. summa cuborum 6 Q † 8 —— 1 N. hæc ergo ad summam laterum, hoc est ad 2, rationem habet quæ quadrati est ad quadratum. Est autem 2 duplus quadrati: ergo etiam 6 Q † 8 —— 12 N duplum quadrati erit. proinde semissis, puta 3 Q † 4 —— 6 N æquabuntur quadrato. eius latus sit 2 —— 4 N. fit secūdus 10. & secūdū postulata erit alterū latus 10, alterū 16. tollo decimastertias, & semissem; ipsorū cuborū sunt latera 5 & 8. Venio ad principio ppositū. ac cubi latus statuo 5 N. erit cubus 125 C. qui additur utriq;, fit cubus octonarij dēto latere positi cubi, hoc est fit 512 C —— 5 N. is ad 5 N additus, cubū facit.

Duo cubi, quorū summa ad laterū summā ut quadrati ad quadratum.

facit. additus autem ad 125 C, facit 637 C — 5 N. hoc debet æquare latus cubi 512 C. ergo 8 N æquales 637 C — 5 N. fit 1 N, 1. & iuxta postulata, cubus est 125, latus 5, appositicius numerus 267.

## XYLANDRI.

*Quia omnia sunt deprauatissima, ita retuli ferè ut habebantur in Græco: quæ non Dauum profectò, sed Oedipum uideri possunt desiderare. Emendato ipse Græca ex nostra interpretatiõe. Certè 5 & 267 cõficiunt 272, qui nequaquã est cubus. multo minus is numerus fiet 392 (quæ est summa dati cubi & adyciẽdi numeri) in se cubicè multiplicato. Et tamẽ ingeniosissima est quã autor docuit soluẽda huius quæstiõis ratio. Itaq; nõ pigebit eã eruere, & restitutã suæ integritati cũ Lectore cõmunicare. Cubũ quẽuis pro cubo quæstionis licuit sumere. sed more suo autor minimum sumit 8 C. eius radix cubica est 1 N. Addendi autem numeri ea est cõditio, ut lateri cubico adiectus, cubũ cõficiat, cuius latus cubicũ sit summa cubi dati & addẽdi numeri. Ergo latus dati ab alio aliquo cubo (heic quoq; quiuis poterat sumi,) utpote 27 C subtrahitur: residuum 27 C — 2 N est addẽdus numerus. liquet enim latere dati cubi, quod est 2 N, adiecto, cubũ 27 C integrari, cuius latus cubicũ 3 N. Cæterũ huic lateri debet æquari summa dati cubi & numeri aditicij, quam uides esse 35 C — 2 N. additis utrobiq; 2 N, 5 N æquãtur 35 C; hoc est depressione facta, 35 Q æquantur 5. Ergo 1 Q fit 7. Heic quid 1 N sit, dici non potest, quia 7 non est quadratus. alioqui eius radix quadrata rem explicasset. Et surdorũ numerorũ usus locũ heic nõ habet. Ergo alia uia rem aggreditur Dioph. Considerat originẽ numerorũ 35 & 5, & nono problem. uenatur ꝓpositũ. Quærũtur duo cubi, quorũ summa ad summã laterũ rationem habeat quadrato numero explicabilẽ. Latera 1 N, & 2 — 1 N. summa 2. Cubi, 1 C, & 6 Q † 8 — 12 N — 1 C. summa 6 Q † 8 — 12 N. Porrò 2 est duplus quadrati, scilicet unitatis: (poteramus dicere semissẽ quadrati, scilicet 4, esse, ideoq; duplare. sed minimos numeros optimo instituto cõsectantẽ autorẽ sequimur.) Ergo eius semissis quadratus. quare, ex hypothesi huius problematis, etiã summa cuborũ semissis 3 Q † 4 — 6 N quadratus erit, seu quadrato æqualis. Vt 4 tolli utrinq; possint, ac inter N & Q æquatio statui, ideò huius quadrati latus ponitur 2 — 4 N. quadratus 4 † 16 Q — 16 N æquatur 3 Q — 6 N † 4. Abyce utrinq; 4 & 3 Q, & adyce utriq; 16 N, inuenies æquationem inter 10 N & 13 Q. seu 10 & 13 N. Ergo 1 N est $\frac{10}{13}$. quo detracto de summa laterum 2, relinquitur $\frac{16}{13}$. Sed hæc latera si sumerentur, summa non æqualis, uerũ dupla fieret quadrati. ideò semisses eorum sumũtur $\frac{5}{13}$ & $\frac{8}{13}$: ut cubi quoq; ex hypothesi æquentur quadrato. Quod autem de tollẽdis decimistertijs innuitur, tale est. Denominator omitti, adeoq; abyci potest & debet. nã est cõmunis utriusq; lateris: ut si de cubis numeratorũ constet, eorũ summã ad 13 habere rationẽ quadrato numero exprimẽdam, abundè sit rei satisfactũ. Numeri ergo in posteriore problemate desiderati, sunt 5 & 8. nam summa horũ est 13. quadratorũ 125 & 512, summa 637, quæ ad 13 est ut 49 (quadratus uidelicet) ad 1 quadratũ. His itaq; confectis, reditur ad propositum. & cubus datus ponitur 125 C, latus eius cubicũ 5 N. addendus numerus, cubus de 8 N, minus latere positi cubi, hoc est 512 C — 5 N. cui si latus 5 N addatur, cubum fieri est euidentissimum. Restat ut, cubus datus addendo adiuncto, hoc est 637 C — 5 N æquetur 8 N: lateri nimirum cubico eius cubi qui de 8 N fiebat, & qui detracto dati latere additicius erat numerus. Adde utrinq; 5 N, habes 637 C æquales 13 N. id est, characteribus deminutis 637 Q æqualet 13, & facta partitione, 49 Q æquabũtur 1 N. Est ergo 1 N $\frac{1}{7}$. Accõmodemus hoc ad postulata. Latus cubi erat 5 N, est ergo ipsum $\frac{5}{7}$, & cubus datus $\frac{125}{343}$. Addẽdus numerus est cubus de $\frac{8}{7}$ (hoc est enim 8 N) utpote $\frac{512}{343}$, si hinc auferas latus dati cubi, quod est $\frac{5}{7}$ seu $\frac{245}{343}$. hoc sublato, restat additicius numerus $\frac{267}{343}$. Is cum latere dati cubi $\frac{5}{7}$ seu $\frac{245}{343}$ coniunctus, statim reficit cubum $\frac{512}{343}$. Huius cubicum latus est $\frac{8}{7}$. Adde cubũ datũ $\frac{125}{343}$ ad additicium $\frac{267}{343}$, summa $\frac{392}{343}$, hoc est planissimè $\frac{8}{7}$, latus alterius cubi; ut postulabatur. nam 49 est communis mensura numerorum 392 & 343. Vides iterũ denominatores omissos perperam: & nobis sudandum in restituenda re fuisse.*

XI. Inueniamus duos cubos suis æquales lateribus. In Numeris horum latera statuãtur, 2 N & 3 N. Cubi ergo cõiuncti erũt 35 C, quod ęquatur summę laterum 5 N. & depressis characteribus 35 Q æquãtur 5. Aequatio hęc rationali numero nõ potest explicari. Enimuerò 35 Q summa sunt duorũ cuborũ 8 & 27. & 5 summa est laterũ cubicorũ istorũ. Redijt itaq; res eò, ut quærẽdi sint duo cubi, quorũ summa diuisa per summã laterũ, quotiẽs sit quadratus. Hoc aũt ostẽsum iã est. suntq; latera cuborũ 5 N, & 8 N. Ad propositũ ergo ipsum reuertor, & latera cuborũ pono 8 N & 5 N. Cubo-

rum summa 637, summæ laterũ æqualis, quæ est 13 N. fit 1 N, $\frac{1}{7}$. Secundum postulata ergo cuborum latera sunt $\frac{5}{7}$ N, & $\frac{8}{7}$ N. cubi ipsi $\frac{125}{343}$ & $\frac{512}{343}$.

XYLANDRI.

*Hæc quæstio è præcedenti facilè intelligitur. Notum est autem, quorum numerorum ratio est unius ad alterum ut quadrati ad quadratum, eorum inter se uel multiplicatione uel diuisione numerorum exsistere quadratum. Examen. Cuborum summa est $\frac{637}{343}$. horũ numerorũ huius fracti communis mensura est 49. ergo in primis numeris summa scribitur hæc $\frac{13}{7}$. atqui tanta etiam est laterum $\frac{5}{7}$ & $\frac{8}{7}$ summa, quod poscebatur.*

XII. Inueniamus duos cubos, quorũ interuallum æquale sit Interuallo laterum cubicorum. Latera sint 2 N & 3 N. Cuborum hinc ortorum interuallũ est 19 C: laterum interuallum 1 N. Ergo 1 N æquatur 19 C. Explicari quid sit 1 N, non potest; quia species ad speciem non habet rationem quadrati ad quadratum. Eò itaq; sum redactus, ut inuenire opus habeam duos cubos, quorum interuallum ad ipsorum laterum interuallũ rationem habeat, quæ est quadrati ad quadratum. Sunto latera cuborum, 1 N, & 1 N † 1. ut differentia ipsorum, puta 1, *fit quadratus numerus. Differentia cuborum est 3 Q † 3 N † 1. hæc ad 1, quod est interuallum laterum, debet se habere, ut quadratus ad quadratum. Ergo quadratus erit, qui producetur horum altero in alterum multiplicato. Producitur uerò 3 Q † 3 N † 1. id æquabimus quadrato cuius latus sit 1 —— 2 N. & fit 1 N 7. Reuertor nunc ad primum institutum, ponoq; cuborum latera 7 N, & 8 N. laterum differentia 1 N. cuborum 169 C. ergo hi æquantur 1 N. fit 1 N, $\frac{1}{13}$. Vt ergo postulatis faciamus satis, latera cuborum sunt $\frac{7}{13}$ & $\frac{8}{13}$.

XYLANDRI.

*Vbi asteriscũ signaui, excidit aliquid. & rursum denominator fuit omissus (ut ferè semper) fransq; facta solutiõi. Cubus de 1 N † 1, est 1 C † 3 Q † 3 N † 1. unde si alterũ 1 C auferas, cuborũ differentia siue interuallum exstat. Scitè autem & pereleganter ob uarietatem hic usus est proprietate numerorum qui sunt quadratorum similes, quòd inter se uel multiplicati ij, uel diuisi, quadratũ faciunt numerũ. quod uariè, uel ex prima noni Euclidis notũ est. & latus quadrati appositè fit 1 — 2 N, ut unitate absoluta utrinq; reiecta, inter se cõparentur Q & N. Finis uidetur intercidisse. examẽ subijciamus. Laterũ $\frac{7}{13}$ et $\frac{8}{13}$ differẽtia est $\frac{1}{13}$. Cubi sũt $\frac{343}{2197}$ et $\frac{512}{2197}$. interuallũ horũ $\frac{169}{2197}$, quod p secũdã septimi Euclidis planissimè est $\frac{1}{13}$. itaq; satisfactũ pposito.*

XIII. Inueniantur duo numeri, ut maioris cubus adscito minore numero, æquetur minoris cubo adsciscẽti maiorẽ numerũ. Sint numeri 2 N & 3 N. Maioris cubus adscito minore numero fit 27 C † 2 N. Minoris cubus adscito maiore numero fit 8 C † 3 N. Hęc ergo æqualia inuicem. Depressis nominibus, fiunt 19 Q æquales unitati. Sed 1 N quid sit, explicari numero nõ potest. At 19 Q sunt interuallũ duorũ cuborũ, unitas laterũ est differentia. Eò itaq; res mihi redijt, ut quęrendi sint duo cubi, quorũ interuallũ ad interuallũ laterũ ea sit ratiõe prædita, qua est quadratus ad quadratũ. Suprà aũt hoc est demõstratũ. & sunt cuborũ latera 7 atq; 8. Accedo itaq; ad id quod primò quęrebatur: numerosq; statuo 7 N & 8 N, fiunt 343 C † 8 N æquales 512 N † 7. & 1 N fit, $\frac{1}{13}$. Ad postulata, numeri sunt $\frac{7}{13}$ & $\frac{8}{13}$, ac demonstratio luculenta.

XYLANDRI.

*Minus reliquis uitiatum est hoc problema: nisi quod falsi solutionis numeri proponũtur, denominatore neglecto. Veras examinemus. Minoris cubus est $\frac{343}{2197}$. adde maiorẽ $\frac{8}{13}$, hoc est $\frac{1352}{2197}$, habebis $\frac{1695}{2197}$. Maioris cubus est $\frac{512}{2197}$, adde minorem $\frac{7}{13}$, hoc est $\frac{1183}{2197}$, rursum habebis $\frac{1695}{2197}$.*

XIV. Quęrũtur duo numeri, quorũ summa, ipsorũ uterq;, sed & interuallũ ipsorũ, si unitas eis singulis adijciatur, quadrati numeri fiãt. Si unitatẽ auferã ab aliquo quadrato, habuero primũ. Fingo aliquẽ quadratũ, cuius latus sit aliquot N & 1. ut 3 N † 1. quadratus hinc fit 9 Q † 6 N † 1. hinc abiecta unitate, primũ pono 9 Q † 6 N. Rursus quia uolumus primũ cũ secũdo & unitate quadratũ facere: sed primus ac secundus
* iũcti cũ unitate & Q 9, N 6 sunt: secũdus aũt cum unitate quadratũ cõficit: quærendum mihi obtigit quis quadratus cõiunctus cũ 9 Q † 6 N quadratũ cõflet. Expono duos numeros, quorũ multiplicatiõe unius in alterũ fiãt 9 Q † 6 N. hoc in sese mul-
* tiplicatũ fit 16 Q † 24 N † 9. aufero 1, & statuo secundũ 16 Q † 24 N † 8. primus aũt est 9 Q † 6 N, quorũ quiuis cũ 1 quadratũ facit. restat ut etiã differẽtia eorum cum 1, hoc

est 7

est 7 Q † 18 N † 9, æquetur quadrato. cuius latus sit nimirum 3 —— 3 N. fit 1 N, 18. ad postulata, erit primus 3024, secundus 9624. & manifesta est demonstratio.

XYLANDRI.

*Ne propositio quidem huius quæstionis intelligi ex uerbis potest. & cùm alia sunt mutilata, tum 9624 alter desideratorũ falsus est numerus. pro quo repones ε̄ χ κ δ, hoc est 5624. Hi aũt duo numeri planissimè ea præstant, quæ in quæstione (ut est à me proposita) exiguntur. Summa ipsorum adiuncta 1, fit 8649, quadratus lateris 93. Si ad priorem numerum 1 adijciatur, fit quadratus 3025, lateris 55. si 1 ad posteriorem numerum addas, quadratus fit 5625, lateris 75. Deniq́; si minorem à maiore auferas, relinquitur 2600. atqui 2601 quadratus iam est lateris 51. Est hæc quæstio ualdè elegans, & inter quadratorum miracula meritò locum habet. Tractationem ita reposui, ut inueni. hoc est ualdè mutilatam. Primi inuentio expedita est. Pro secundo requiritur quadratus, qui cum primo coniunctus, quadratum præstet. eum ubi inueneris, unitate multato: habebis utiq́; secundum. itaq́; fiet, ut & summa duorũ, & pro se quisque unitate adiecta quadrati omnes fiant. Fient ergo duo quadrati, quorum interuallum sit 9 Q † 6 N. Heic iam ad duplicatam æquationem recurrendum est, quæ suprà huius operis libro secundo, propositione duodecima alibiq́; explicata fuit Quærendi numeri duo, quorum unius in alterum multiplicatione gignatur 9 Q † 6 N: ea, quæ ibi dicta est, lege. Autoris uerba heic exciderunt. Sed cùm dicat ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ γίνεται: licuit diuinare quæ fuerint. rem ego dicam. 36 Q † 24 N † 9 quadratus est, cuius latus inueniri etiam uulgata radicis quærẽdæ ratione posse, ad decimamsextam secundi suprà docui. est enim ut uides 4 N † 3. Nam secutus heic quoq́; est Diophantus id quod erat simplicissimum. numeros, inquam, qui multiplicatione sua interuallum componerent, sumsit 9 N † 6, & 1 N. & quia minor quadratus quæritur, interualli eorum, quod est 8 N † 6, semissem latus eius statuit, rectissimè quidem, puta 4 N † 3. Reliqua deinceps plana sunt. differentia numerorum 7 Q † 18 N † 8. Neque obscurum est, cur latus quadrati sumserit 3 —— 3 N, nimirum ut 9 utrinq́; tolli, itaq́; Q cum N componi possent. Quadratum est 9 Q † 9 —— 18 N, æquale 7 Q † 18 N † 9. abijciuntur utrinque 7 Q † 9, & utrinq́; adduntur 18 N: ita 2 Q æquantur 36 N, &c.*

*16 Q † 24 N † 9*
*————————*
*4 N † 3*
*————————*
*8 N*

XV. Quæruntur tres numeri, quorum summa summæ interuallorum quib. ipsi inter se distant, sit æqualis. Quoniam differentia maximi & medij, ac differentia medij & minimi, & differentia maximi ac minimi: simul iunctę tribus numeris æquantur. summa autem hæc est duplum differentiæ maximi & minimi. Ergo duplum interualli inter maximum & minimum æquatur tribus numeris. Ponamus minimũ esse quadratum unitatis unius, maximum 1 Q † 2 N † 1. Horum interuallum duplicatum fit 2 Q † 4 N, qualium duo dicti sunt 1 Q † 2 N † 2. Sunt autem hi tres quadrati. Ergo necesse est hæc ęquari quadrato, cuius latus ponamus 1 N — 4. & fit, 1 N, 9. ad postulata. erit maximus 196, medius 121, minimus 1, omnia per 25. Erit maximus 196, medius 121, minimus 25. *

XYLANDRI.

*Ita ad me peruenit hæc quæstio. Non autẽ dubito, quin ad quadratos propriè pertineat hoc problema, & tres hi numeri quadrati requirantur. quod non solutio modò problematis, sed & ordo docendi postulat. Cæterùm hoc facilè intelligitur, tribus numeris propositis, differentiam maximi & minimi æqualem esse reliquorum differentijs: & proinde omnium differentiarum summam, duplum esse differentiæ extremorum. quod non de tribus modo, sed quotcunq́; numeris uerum est. & exempla docent.*

*10 { 6, 9, 16 } — differentiæ 3 (6–9), 7 (9–16) — Summa 10.*

*18 { 5, 8, 12, 17, 23 } — differentiæ 3, 4, 5, 6 — Summa 18. &c.*

Quod si hęc quęstio quibusuis numeris solui debeat, lõgè facilima est ratio. Quos uis. n. duos numeros ꝓ extremis ponere licet, modo duplũ interualli eorũ summã ipsorũ excedat. nã statim sũma à duplo illo detracta mediũ relinquet. *Qui canõ est ex* CANON.

*Algebra*

*Algebrae operatione tractus. Pono enim primum 3, minimum, maximum 13. Esto medius 1 N. Interuallum extremorum 10, eius duplum 20. tanta debet esse summa trium numerorum. Ergo 16 † 1 N aequantur 20. fit 1 N, utpote medius 4. ut uides. eadem summa interuallorum 1. 9. 10. quae numerorum 3. 4. 13. Quod si extremos posuissem 2 & 26. mediũ inuenissem 20. interualla 18. 6. 24. summa 48, quae & numerorũ. At si extremos posuissem 6 & 16, aut 6 & 14, non successisset. aequarentur enim 20 & 1 N † 22 illo modo, quod est 0 | | 1 N † 2. hoc aut 1 N † 20 & 20, quod est 1 N | | 0. quorum utrunque est absurdum. Sed, ut dixi, heic de quadratis agitur.*

$$10\begin{cases}3\\4\\13\end{cases}\quad\begin{matrix}1\\ \\9\end{matrix}\qquad\overline{\quad 20\quad}$$

*Numeri hi, 196. 121. 25. omisso denominatore 25, qui innui uidetur, omnino satisfaciunt proposito. Nam quadrati sunt omnes, & summam conficiunt 342. at maior minorem superat unitatibus 171. medium 75, hic minimum 96. qui numeri ipsi quoque summam conficiunt 342. qua de re uide quae annotauimus ad decimamseptimã primi, &c. Sed quo pacto medius & summa omnium inueniatur, & ad aequationẽ perueniatur, & quid sit quod aequetur quadrato lateris 1 N —— 4 qui quadratus est 1 Q † 16 —— 8 N, aut unde haec quadrati fictio pẽdeat, ac quomodo 1 N cognoscamus esse 9: dixisse autorem non dubito. Sed exciderint eius uerba. Nos ergo de nostro substituamus. Duplum interualli extremorum est 2 Q † 4 N. id aequat summam trium numerorum. at extremorum summa est 1 Q † 2 N † 2. eam inde si auferamus, relinquitur 1 Q † 2 N —— 2. tantus ergo est medius. Sed quadratũ eum esse oportuit (nam de quadratis est, ut dixi, quaestio. idque uolunt uerba haec, ὡσὶ ἢ οἱ τρεῖς τετράγωνοι.) Itaque cõparatur quadrato 1 Q † 16 —— 8 N, à latere 1 N —— 4 producto, ea ratione nimirum, ut 1 Q utrinque sublato aequatio inter N & unitates explicetur. nam additis & subtractis quae ratio iubet, fiunt 10 N aequales 18. & 1 N non 9, sed $\frac{9}{5}$ esse deprehenditur. Maximus ergo est $\frac{81}{25}$ (1 Q) $\frac{18}{5}$ seu $\frac{90}{25}$ (2 N & $\frac{25}{25}$ (1.) hoc est $\frac{196}{25}$. Eodem modo medius colligitur $\frac{121}{25}$. & minimus manet, ut posueramus initio, 1. Cur autem denominator abijci debeat ac possit, aliquoties in superioribus monui.*

XVI. Dentur tres numeri, quorum bini in reliquum ducti numeros qui postulãtur producant. scilicet primus & secundus in tertium, 35. secundus & tertius in primum, 27. tertius & primus in secundum 32. Ponatur tertius 1 N. Ergo primus & secundus 35 N. Esto primus 10 N, secundus 25 N. duo adhuc postulata sunt nobis praestanda. Secundus & tertius in primum debent 27 producere, at producunt 10 † 250 Q. hoc ergo aequatur 27. Tertius & primus in secundum faciunt 25, † 250 Q, & 32: & 10, & 250 Q aequantur 27. excessus unitatum super unitates, 5. ut si etiam 10 † 250 Q ultra 25 † 250 Q habuissent 5, aequalia utrique fuissent interualla. sed 25 unitates à secundo sunt, 10 à primo. Volo eorum interuallum esse 5. Ipsi autem primus & secundus non sunt quinis, sed coniuncti faciunt 35. Vsuuenit ergo mihi, ut 35 diuidam in duos numeros. quorum differentia sit 5. Ij sunt 15 & 20. statuo primum 15 N, secundum 20 N. Ita summa secundi & tertij in primum facit 15 † 300 Q aequale 27. summa primi & tertij in secundum 20 † 300 Q aequale 32. & si 15 † 300 Q aequem 32, fit 1 N, 5. ad postulata ergo primus numerus est 3, secundus 4, tertius 5.

XYLANDRI.

a $\frac{35}{1N}$ b $\frac{10}{1N}$ c $\frac{25}{1N}$ d $\frac{25}{1N}$ e $\frac{1Q+25}{1N}$ f $\frac{10}{1N}$ g $\frac{10Q+250}{1Q}$ h $\frac{10}{1N}$ i $\frac{1Q+10}{1N}$ k $\frac{25}{1N}$ l $\frac{15Q+250}{1Q}$ m $\frac{10}{1N}$ n $\frac{25}{1N}$

*Nam 7 (A & B iuncti) in 5, gignunt 35. 9 (B & C iuncti) in 3, faciunt 27. 8, (nempe C & A iuncti) in 4, 32 producunt. & postulatis satisfit planissimè. Operatio autem Sphingis aenigma uideri potest. & inuertendo quale est in Graeco reliqui. Conabimur tamen explicare. Tertius si sit 1 N, cùm per summam primi ac secundi multiplicatus 35 procreare debeat, hanc [a] esse oportet. Hanc summam in primum & secundum pro arbitrio primùm distribuo. nimirum in [b] & [c]. nam sicut $\frac{10}{1N}$ & $\frac{25}{1N}$ facerent in summa $\frac{35}{1N}$: ita heic quoque res habet. Proinde secundi & tertij summa sunt 1 N [d] hoc est [e]. Eam multiplico per primum [f] producitur [g] aequale 27. hoc est 10 Q † 250 aequale 27 Q. Rursum tertij & primi summa est 1 N [h] nimirum [i]. id multiplico per secundum [k], producitur [l] aequale 32. hoc est 25 Q † 250 aequantur 32 Q. His duabus aequationibus inter se comparatis, cum utrinque abijci 250 expediat: si inter 10 & 25 idem esset quod inter 27 & 32 interuallum, (nam notam Q undique abijcere licet) res iam ad aequalitatem deducta, adeoque confecta esset. Atqui satis apparet, inaequalitatem inde ortam, quòd temerè summã primi & secundi, non ratione diuisimus in [m] & [n]. nam si 10 & 25 quinario differrẽt itidem ut 27 & 32, essemus in uado. Ergo 35 diuidemus in partes duas, quarum interuallum sit 5. itaque errorem arte corrigemus. nam si id ab initio fecissemus (docendi autem gratia & industriae*

acuendae

*acuenda Diophantus incommodam diuisionem priore loco proposuerat. tum posteriorem diuisionē requiri peritus facilè perspiciat) labore hoc supersedissemus. Diuisio est facilima, & probl. 1. lib. 1. huius operis explicata. partes 15 & 20. Ergo primo [a], secundo [b] tribuemus. operatiq́ ut* a $\frac{25}{1N}$
*prius (omnia scribendo inculcare nihil attinet) 15 Q † 300 aquari 27 Q, itemq́ 20 Q † 300 aquari 32 Q inueniemus. abyce utrinq́ 300. uides antecedentes 15 & 20 eodem auctos numero, quo 27 & 32 consequentes. non enim hîc proportione, sed interualli aqualitate constat aqualitas. Ergo 5 est ultimus numerus, primus 3, secundus 4. ut disputare de corruptissimis Diophanti uerbis prolixius, non sit opus.* b $\frac{20}{1N}$

XVII. Tres numeri quærantur, quorũ summa æquet quadratũ: ita ut quadratus cuiuslibet ipsorum, cum sequente ipsum numero quadratum conficiat. Medium ponamus numeros quotquot libuerit. ac sit 4 N. cũq; debeat quadratus primi huic adiectus quadratũ facere: in eo nunc res uertitur, ut inueniam quadratũ, cui si adijciam 4 N, summa sit quadratus. Pono duos numeros, quorũ unus in alterũ multiplicatus producat 4 N. atq; hi sunt (qui eũ metiũtur) 2 & 2 N. quorũ interualli semissis 1 N — 1 ponatur pro numero primo. Iam ergo hoc est confectũ, ut primi quadratũ cũ secũdo numero faciat quadratũ. Restat ut medij quoq; quadratus adscito tertio quadratũ cõficiat. hoc expedietur, si quadratũ habeã, qui ademtis 16 Q. maneat quadratus. Pono latus eius 4 N † 1. fit quadratus eius 16 Q † 8 N † 1. aufer 16 Q. habes tertiũ, 8 N † 1. Superest ut hi tres quadratũ sua summa conficiãt. at summa est 13 N. huic æquabimus 169 Q. fit 1 N, 13 Q. Ad propositũ hæc aptemus. Erit primus 13 Q — 1, secũdus 52 Q. tertius 104 Q † 1. Ita tria iã postulata impleuimus, non definito etiamnũ quid uel quantũ sit 1 N. Restat ut quadratus tertij, hoc est 10816 QQ † 208 Q † 1, cum numero primo summam condat quadratam. At summa est horum 10816 QQ † 221 Q. & depressis characteribus 10816 Q † 221. hoc æquatur quadrato. Ponimus eius latus 104 N † 1. Fit 1 N, 55. Quod si ad postulata transferatur, erit primus 36021, secundus 157374, tertius 317304.

XYLANDRI.

*Ex mea uersione corrigi pleraq; Græcorum uerborum menda possunt. Est autem ualdè ingeniosa solutio quæstionis, sic satis difficilis quatuor postulata habentis. Ratio primi inueniendi explicata est ad decimam quartam huius, & sextam eiusdem, ac trigesimamquintam secundi. tertij pendet à fictione laterum, sæpenumerò indicata. Trium autem numerorum summam callidè 169 QQ aquat, ut in fine posset fingendo latere quadrati post depressos characteres soluere quæstionem aquatione explicata. Postrema aquatio sic habet. Lateris 104 N † 1 quadratus est 10816 Q † 208 N † 1, cui aquatur 10816 Q † 221. abyciuntur utrinque Q, & unitas. ita aquantur 208 N ac 220. fit 1 N, $\frac{55}{52}$. (In Græco numeri sunt corruptissimi, quibus satisfieri quæstioni debuit: ob ineptam minutiarum notationem.) Ergo 1 Q facit $\frac{3025}{2704}$, & 13 Q sunt $\frac{39325}{2704}$. unde si auferas $\frac{2704}{2704}$, hoc est 1, primus extabit $\frac{36621}{2704}$ (lege γ̄ ϛ, χκα, β, ψδ α.) Secũdus est $\frac{157300}{2704}$ (scribe ιε̄ ζ, τ repetito denominatore.) Tertius $\frac{317304}{2704}$ (pro numeratore λα̃ ζ, τ̄ δ, rectè scriptum fuit.) Cæterùm denominatore abiecto numeri sunt falsi. Longum autem est & ualdè operosum examen. Sũma omnium $\frac{511225}{2704}$, quadratus numerus, cuius latus $\frac{715}{52}$. Ne ignauus uidear seruire, cætera tibi relinquo exploranda. omnia consentanea deprahendes.*

XIIX. Dentur tres numeri, quorum summa sit quadratus numerus: cuiusuis aũt ipsorum quadratus demto qui eũ ordine insequitur numero, quadratus restet. Medium rursus statuo 4 N: & cum hoc detracto quadratus primi sit futurus quadratus: superest ut quadratum inueniam qui demtis 4 N, maneat quadratus. Quærãtur duo numeri, quorum alterius in alterum multiplicatione 4 N producantur. hi sunt, qui eum metiuntur, 2 & 2 N. horum summæ semissem 1 N † 1 statuo primũ numerum. Sic uni postulato tum satisfactum est. Porrò cùm quadratus secũdi tertio multatus numero debeat quadratum relinquere: quadratum lateris 4 N — 1, quod est 16 Q † 1 — 8 N aufero de quadrato secundi, id est 16 Q. relinquitur tertius 8 N — 1. sic secundo etiam postulato satisfit. Rursum quia tres hi, hoc est summa eorum 13 N, æquantur quadrato, id sit 169 QQ. Ergo 1 N fit 13 Q. quod si positis applicetur, fit primus 13 Q † 1, secundus 52 Q, tertius 104 Q — 1. Ita rursum indefinitè tria postulata sunt absoluta. Superest ut quadratus tertij demto numero primo conflet quadratũ. at qua-

at quadratus ille primo detracto numero fit 10816 Q Q —— 221 Q. & depressis characteribus 10816 Q —— 221. Hoc æquatur quadrato, cuius latus ponimus 104 N —1, fit 1 N, 111. Ad propositum, erit primus 17 —— 89. secundus 64 unitates 692. tertius 127,568.

XYLANDRI.

Qui cum metiuntur.) *Alter scilicet altero. de qua re dictum est ad secundi xxxv. Caterùm quia hic maior quæritur quadratus, summa semisse utitur. ἀορίστως, indefinitè solui est, cũ æstimatione Numeri nondum comperta operamur. Finis quæstionis est deprauatus. Vltima æquatio sic habet. Quadratus lateris 104 N —— 1 est 10816 Q † 1 —— 208 N, cui æquatur 10816 Q —— 221. Quadrati utrinq; abijciuntur, itemq; 1, & adduntur utriq; 208 N. ita fit, ut tandẽ 208 N æquentur 222. fit ergo 1 N, non 111, sed* $\frac{111}{104}$. *& 1 Q est* $\frac{12321}{10816}$. *Ergo 13 Q sunt* $\frac{160173}{10816}$, *adde 1, habes primum* $\frac{171717}{10816}$. *secundus est* $\frac{640692}{10816}$. *tertius* $\frac{1296840}{10816}$. *Horum summam inuenies* $\frac{2082249}{10816}$ *quadratum, cuius latus* $\frac{1443}{104}$. *Cætera ipse comperies satisfacere postulatis.*

XIX. Inueniendi sunt duo numeri, quorum primi cubus coniunctus cum secũdo, cubum conficiat: secundi autem quadratus primo adiecto, quadratum exhibeat. Pono primum 1 N: ergo alter est 8 —— 1 C. ita fit ut primi cubus addito secundo numero cubus sit. Restat ut quadratus secundi primo adiuncto fit quadratus. At secundi quadratus adiecto primo fit 1 CC † 1 N † 64 —— 16 C. * Vbi si quæ desunt addas, quæ abundant auferas æqualia ab æqualib. utrobiq; relinquuntur 32 C æquales 1 N, hoc est deminutis characteribus, 32 Q æquantur 1. Est autem 1 quadratus. & si 32 Q etiam quadratus esset, iam solutam dedissemus æquationem. Enimuero 32 illi C proficiscuntur à bis 16 C, ortis ex duplicata multiplicatione 1 C in 8. itaque 32 Q ex quater 8 orti sunt. Proinde id mihi incumbit, ut inueniam cubum, qui per quatuor multiplicatus, quadratum procreet. Is cubus esto 1. cuius quadruplũ æquatur quadrato. ac sint 4 C æquales 16 Q. fit 1 N, 4. Hoc accõmodemus instituto. Sit 1 C, 64. Statuo secundum 64 —— 1 C. Reliquum est ut huius quadratus primo numero adiecto, quadratus maneat. Sed quadratus secundi cum primo numero coniunctus facit 1 CC † 1 N † 4096 —— 128 C. hoc æquatur quadrato. cuius latus sit 1 C † 64. fit 1 CC † 128 C † 4096: additis & detractis quæ ratio imperat, tandem 256 C æquantur 1 N. fit 1 N $\frac{1}{16}$. Ergo ad rem, primus est $\frac{1}{16}$, secundus $\frac{262143}{4096}$.

XYLANDRI.

*Nam primi cubus est* $\frac{1}{4096}$ *qui additus secundo, conficit cubum* $\frac{262144}{4096}$, *cuius latus cubicum* $\frac{64}{16}$ *siue 4. Quadratus secũdi* $\frac{68718952449}{16777216}$. *adde* $\frac{1}{16}$, *hoc est* $\frac{1048576}{16777216}$, *summa fit* $\frac{68720001025}{16777216}$, *quadratus lateris* $\frac{262145}{4096}$. *quod annotandum duxi. Porrò ubi asteriscum posui: exciderunt hæc circiter uerba. Hoc æquatur quadrato. cuius latus pono 1 C † 8. quadratus 1 CC † 16 C † 64. Ita omnia constabunt. Cubum διπλασιασμένον γεγονότα heic uocari cubum per 4 multiplicatũ, res ipsa me docuit. Ita & in sequenti διπλασιάζειν est quadruplicari.* Διπλασιάζειν.

XX. Inueniantur in infinitate tres numeri, ut bini semper quem producunt unius in alterum multiplicatione, is addita unitate fiat quadratus. Vt habeam productũ primi in secundum, aufero 1 de quocunq; libuerit quadrato. eius latus sit N aliquot pro arbitrio, & 1. sit latus 1 N † 1, erit quadratus 1 Q † 2 N † 1. ergo primus in secũdum facit 1 Q † 2 N. Sit secundus 1 N. ergo primus 1 N † 2. Rursus secundi in tertium productus cum unitate quadratus ut fiat: eodem modo agens, à latere 3 N † 1 quadratum procreo 9 Q † 6 N † 1. aufer 1, ergo quod fit ex secundo in tertium, est 9 Q † 6 N. Atqui secundus est 1 N. ergo tertius 9 N † 6. Denique productus è multiplicatione tertij in primũ, adscita unitate, est 9 Q † 24 N † 13, æquale quadrato. Hîc numerus Q est quadratus. & si duplũ eius quod fit ex latere istius numeri in unitates absolutas æquaretur numero Numerorum: indefinitè iam satisfactũ esset tribus postulatis. Cęterùm 13 unitates heic confectæ sunt ex multiplicatione 2 in 6, & additione 1. Porrò unitates duæ ortæ sunt ab eo quod fiebat bis 1 N ducto in 1. & unitates 6 ab eo quod fiebat bis 3 N ductis in unitatem. Volo itaq; ut bis numeri in bis numeros ducti cum unitate faciant quadratum. Atqui bis numeri in bis numeros ducti, sunt quadruplũ numerorum. uolo ergo quadruplum ipsorum addita unitate fieri quadratum. Enimuerò quorumcunq; duorum numerorum, unius in alterum producti

quadruplus

quadruplus cum quadrato differentiæ ipſorum, quadratum facit. Ergo ſi quadratum numerorũ differẽtię ſtatuamus 1, quod fit uno in alterũ multiplicato, eius quadruplũ cum 1, facit quadratũ. & ſi differentiæ quadratũ ponimus unitatẽ, ipſa quoq; differẽtia erit unitas. Itaq; latera quadratorũ quibus hcic utimur, ſtatuenda ſunt in Numeris deinceps, addita unitate. puta ut ſint 1 N † 1, 2 N † 1. Proinde quadratus lateris 1 N † 1 eſt 1 Q † 2 N † 1. unde ſi auferas unitatem, primi in ſecundum productus multiplicatione eſt 1 Q † 2 N. eſto ſecundus 1 N, erit primus 1 N † 2. Rurſum quadratus lateris 2 N † 1 eſt 4 Q † 4 N † 1. aufer 1. ergo ſecundus in tertium facit 4 Q † 4 N. & cùm ſecundus ſit 1 N, erit tertius 4 N † 4. Atq; ita ſoluta eſt quæſtio indefinitè, ut bini quiq; unius in alterum multiplicatione numerum producant, qui addita unitate quadratus fiat. 1 N autem quot libuerit unitatum æſtimabis. Hoc enim eſt infinitè quærere, tales poſitiones conſtituere, ut quamcunq; Numeri æſtimationem iis accommodes, ſemper propoſiti poſtulatis ſatisfiat. Infinitè quærere.

XYLANDRI.

*Tertius in primum quoque, 4 Q † 12 N † 8 producit, cui ſi addas 1, quadratus eſt lateris 2 N † 3. Volumus autem has hypoſtaſes examinare, 1 N ualore poſito 5 & 12. Primus hoc modo fit 14, ſecundus 12, tertius 52. At 14 in 12 ſunt 168. in 52, 624. 52 in 14, 728. His ſingulis 1 adde, habes quadratos 169, 625, 729. Illo modo primus eſt 7, ſecundus 5, tertius 24. producti 35, 120, 168. aucti unitate 36, 121, 169. Tute in alijs quibuſuis experiare licet numeris. Vt autem oſtenderet Diophantus quadratorum latera qua lege eſſent ſumenda, uſus eſt theoremate, quod ex quinta ſecundi Euclidis facile demonſtrari poteſt. Numeri 7 & 12. productus 84. quadruplum 336. adde 25 differentia quadratum, fit 361 quadratus. Numeri 3 & 11, productus 33, quadruplum 132. differentia 8. quadratum 64 cum 132 facit 196 quadratum.* Quadruplum producti cum quadrato differentiæ producentiũ, quadratus.

XXI. Dentur quatuor numeri, quorum bini quem alter in alterum ductus faciũt, is addita unitate fiat quadratus. A' quadrato aliquo unitatem ſi detraxero, reſiduus erit is qui fit ex primo in ſecundum. Sit quadratus lateris 1 N † 1, ſcilicet 1 Q † 2 N † 1, unde ſi abijcio 1, quod ex primo in ſecundum fit, 1 Q † 2 N relinquitur. Sit ergo primus 1 N, ſecundus 1 N † 2. Rurſum ut quod ex primo in tertium fit, adiuncta unitate fit quadratus: ſecutus ea quæ ſuprà demonſtraui, quadratum lateris 2 N † 1 ſumo, quod eſt 4 Q † 4 N † 1. ergo unitate abiecta 4 Q † 4 N eſt quod fit ducto primo in tertium. Et cùm primus ſit 1 N, erit tertius 4 N † 4. Iam quia uolo quod fit ex primo in quartum adſcita unitate fieri quadratum: deinceps à latere 3 N † 1 quadratum fingo 9 Q † 6 N † 1. & abiecta unitate, qui fit ex primo in quartum relinquitur 9 Q † 6. & cùm primus ſit 1 N, erit quartus 9 N † 6. Porrò qui fit ſecundo ducto in quartum, unitate adſcita quadratum facit. atqui ſic conflatur 9 Q † 24 N † 13. Huic æquabimus quadratum à latere 3 N † 4. Fit 1 N 1. Ergo ſecundum poſita, primus eſt 1, ſecundus 33, tertius 68, quartus 105.

XYLANDRI.

*Vbi in uertendo à palàm falſis deſciuerim, conferendo experieris. Sed profectò & æquatio ultima, & ſolutionis numeri falſiſſima ſunt. Nam quadratus à 3 N † 4, eſt 9 Q † 24 N † 16. cum quo ſi æques 9 Q † 24 N † 13. utrinq; 9 Q † 24 N reiectis, 13 & 16 æquabuntur, quod eſt abſurdiſſimum. Itaq; latus faciemus 3 N — 4. ut quadratus 9 Q — 24 N † 16 æquetur 9 Q † 24 N † 13. nã ſic utrobiq; abiectis 9 Q ac 13, & additis 24 N, æquabũtur 3 & 48 N. facit 1 N, $\frac{1}{16}$. ac tantus eſt primus. ſecundus 1 N † 2. eſt $2\frac{1}{16}$ ſeu $\frac{33}{16}$. tertius 4 N † 4 eſt $4\frac{4}{16}$ hoc eſt $\frac{68}{16}$ uel $\frac{17}{4}$. quartus 9 N † 6 eſt $6\frac{9}{16}$ ſiue $\frac{105}{16}$. Primus in ſecundum creat $\frac{33}{256}$, adde 1, id eſt $\frac{256}{256}$. habes $\frac{289}{256}$ quadratum. Primus in tertium facit $\frac{68}{256}$. adde $\frac{256}{256}$, utpote unitatem, habes $\frac{324}{256}$ quadratum. Primus in quartum facit $\frac{105}{256}$, adde 1, habes $\frac{361}{256}$ quadratum. Secundus in tertium producit $\frac{2244}{256}$. adde 1, fiet quadratus $\frac{2500}{256}$. Secundus in quartum facit $\frac{3465}{256}$. adde 1, fit $\frac{3721}{256}$. quadratus lateris $\frac{61}{16}$. Tertius denique in quartum producit $\frac{7140}{256}$. adde 1, habes quadratum $\frac{7396}{256}$, cuius latus $\frac{86}{16}$. quod uolui demonſtrare.*

XXII. Tres numeri proportionales inueniantur, quorum binorum differentia ſit numerus quadratus. Ponatur minimus 1 N, medius 1 N † 4, ut eum excedat quadrato. tertius quoq; 1 N † 13, ut quadrato ſuperet medium. Porrò maximi & minimi dif-

ferentia ſi eſſet quadratus numerus, iam indefinitè ſatisfactū quæſtioni eſſet. Eſt autem 13, qui numerus componitur additis 9 ad 4. Quærendi igitur ſunt duo quadrati æquales uni quadrato. quod facilè fit lateribus trianguli rectanguli ſumtis 9 & 16. Statuo minimum 1 N, mediū 1 N † 9, maximū 1 N † 25. Horum ſemper bini quadrato differunt. Supereſt ut etiam proportionales ſint. At qui tales ſunt, corū medij quadratus ęquatur producto ex primo in ultimum. Hic eſt 1 Q † 25 N. id ergo æquatur 1 Q † 18 N † 81 quadrato medij, fit 1 N 81. ac tantus eſt primus, ſecūdus 140. tertius 56.

XYLANDRI.

*Aequationis & quæſtionis ſolutionem falſam eſſe, liquidò conſtat. Nam ſi ab 1 Q † 18 N † 81 & ab 1 Q † 25 N abyciās 1 Q † 18 N, reſtabunt 81 & 7 N æqualia. ergo 1 N eſt $\frac{81}{7}$. Hi autem tres numeri 81, 140, 56. ſi eſſent proportionales, implerent etiam conditionem à noſtro deſcriptam, & ab Euclide demonſtratam lib. 7. propoſ. 20. At 81 in 56 multiplicatus, producit 4536. & quadratum de 140 eſt 19600, numeri nihil minus quàm æquales. Qui uerò ſint proportionales illi, cum uterq; ſit minor medio, immò etiam ſumma ipſorum cum non attingat? Iam 81 ab 140 ſubductus 59 relinquit, nequaquam quadratum. ut neq; 54 quadratus eſt, quem 56 ab eodem ſubtractus relinquit. Quæramus ergo ueros & poſtulatis ſatisfacturos numeros. 1 N eſt $\frac{81}{7}$. ergo tantus primus. ſecundus 1 N † 9, eſt $\frac{144}{7}$. tertius 1 N † 25, eſt $\frac{256}{7}$. Hos eſſe proportionales conſtat. Nam primus in tertium $\frac{20736}{49}$ producit. ac tantundem eſt medij quadratus. Proportio autem maioris ad minorem eſt utrobiq; 16 ad 9. Porrò aufer primum à ſecundo, ſuperſunt $\frac{63}{7}$. hoc eſt 9 quadratus. à tertio, reſtant $\frac{175}{7}$, id eſt 25, quadratus. Ab eodem ſecundum, relinquuntur $\frac{112}{7}$, id eſt 16, quadratus.*

XXIII. Inueniantur tres numeri, ut qui eorum multiplicatione ſolidus cōficitur, cum quouis ipſorum cōiunctus, quadratum faciat. Ponamus ſolidū ex his tribus ortū, eſſe 1 Q † 2 N. & primū numerū 1. ita enim ſolidus huic adiectus quadratū faciet. Idem ſolidus cū ſecūdo numero ut quadratū faciat, de quadrato aliquo auferā 1 Q † 2 N. reſiduum erit ſecundus. Sit quadrati huius latus 1 N † 3. ipſe 1 Q † 6 N † 9. hinc aufero ſolidum 1 Q † 2 N, reſtat ſecūdus 4 N † 9. Iam cum ſolidus ſit 1 Q † 2 N. primo aūt in ſecundū multiplicato producatur 4 N † 9: per hunc ille ſi diuidatur, habebimus tertiū. Verùm hęc diuiſio non eſt poſſibilis. Vt aūt fieri poſſit ſciendū eſt quòd ſicut ſe habet 1 Q ad 4 N, ita etiā 2 N ad 9. & permutatè ut 1 Q ad 2 N, ita 4 N ad 9. At 1 Q ſemiſſis eſt (quantū ad unitates attinet) de 2 N. ut ſi 4 N quoq; eodē modo fuiſſent ſemiſſis ex 9: inſtitui poſſet diuiſio. Atqui 4 N proficiſcūtur ab eo, quòd 6 N amplius eſt quàm 2 N. & 4 N ſunt orti à duplo eius quod fit ex 3 in 1 N. Iam 9 quadratus eſt de latere 3. Res itaq; eò deducta eſt, ut quærendus ſit numerus loco unitatū triū, à cuius duplo ſi duæ auferantur unitates, reſiduum ſit ſemiſſis quadrati qui fit ab eo numero. Sit is numerus 1 N, huius duplum detracto binario eſt 2 N — 2. Quadratus 1 Q, ergo huius ſemiſſi æquatur 2 N — 2. Ergo 1 Q eſt æquale 4 N — 4. fit 1 N, 2. Reuertor nunc ad primò propoſitum. Primum numerū poſueram 1, ſolidū aūt ex triū multiplicatione conflatū, 1 Q † 2 N. Verùm ſolidus ille etiā cum ſecūdo debet componere quadratū. Ergo ſecundum habebo, ſi ab aliquo quadrato ſubduxero 1 Q † 2 N. Quadrati huius latus pono 1 N, & tot unitatū, ut harū de duplo ſi 2 auferantur, reſiduū ſemiſſis ſit quadrati unitatū. id eſt, ut demōſtrauimus iā, latus erit 1 N † 2. huius quadratus 1 Q † 4 N † 4. unde ſi ſolidū detraxero, reſtat ſecūdus 2 N † 4. Iā primo in ſecundū ducto 2 N † 4 producūtur, per quē ſi diuidatur ſolidus, prodetur tertius, nimirū $\frac{1}{2}$ N. Reſtat ut ſolidus ille unà cū tertio, quadratū cōficiat. fit aūt 1 Q † $2\frac{1}{2}$ N. hoc ęquabimus 4 Q. fit 1 N, 5. Ergo ſecūdū ea q̄ poſuim⁹, primus eſt 1, ſecūdus 34, tertius 2.

XYLANDRI.

*Multa quæ in Græco erant uitioſa, uerſione noſtra fretus corriges. Vides ut in ſecundo ponendo incommodum quod acciderat, argutè corrigatur. Nam ponitur à 3, quæ 1 N adſciuerat ut inde quadratum fieret. itaq; oſtendit non 3, ſed 2 eſſe adſciſcendum uni N, ut diuiſio expediatur. Aequationem autē hanc (1 Q æquatur 4 N — 4) non explicauit autor, cum ſit è connexarum genere, earum quas quinta quarti Euclidis diſcutit. Nam (ut alibi docuimus) dimidium de 4 N (charactere omiſſo) eſt 4. unde ſi auferatur (ob ſignum —) 4, relinquitur nihil*

*quod*

*quod siue addas ad 2, siue inde auferas, 2 erũt ualor 1 N. Diuisio quoq; solidi 1 Q † 2 N in secũdi & primi productũ 2 N † 4, satis est arguta. superiorũ inferiora quod ad numeros attinet sunt dupla, sed in superioribus characteres inferioribus sunt uno ordine maiores. Si ergo 2 N per $\frac{1}{2}$ N multiplicemus, habebimus 1 Q. Si 4 per $\frac{1}{2}$ N existent 4 N. est ergo $\frac{1}{2}$ N quotiens. In ultima aequatione 4 Q sumuntur, ut 1 Q utrinq; abiecto, aequatio sit inter 3 Q & $2\frac{1}{2}$ N. & 1 N est, non 5, sed $\frac{5}{6}$. Proinde numeri etiã quos quaerebamus, primus 1 siue $\frac{6}{6}$, secundus $\frac{24}{6}$, tertius $\frac{9}{16}$. (sic enim sunt corrigendi.) Horũ primus in secundũ facit $\frac{24}{6}$, quod productum in tertium ubi duxeris, $\frac{81}{36}$ habebis, solidum de quo res est. adde ei primum, seu $\frac{36}{36}$, habes quadratum $\frac{11}{36}$. Adde solido secundum, habebis $\frac{289}{36}$ quadratum. Adde solido tertium, fiet $\frac{100}{36}$ quadratus. quod libuit ostẽdere.*

XXIV. Inueniantur tres numeri, ut qui ex ijs fit solidus, quouis ipsorum multatus, fiat quadratus. Sit primus 1 N, solidus autem 1 Q † 1 N, qui multatus primo, quadratus fit. Iam cum solidus è tribus confectus sit 1 Q † 1 N. & primus sit 1 N: utiq; productus secundi in tertium multiplicatione erit 1 N † 1. ac ponamus secundum esse 1. ergo tertius est 1 N † 1. Superest ut solidus tam secundo quàm tertio detracto, utrobique fiat quadratus. At secundo multatus, fit 1 Q † 1 N —— 1: tertio adempto, retinet 1 Q —— 1. horum utrunque aequabitur quadrato. Heic iam duplicata aequatio exsistit. Arripio interuallum, quod est 1 N. & constituo duos numeros, quorum unius in alterum multiplicatione 1 N procreetur. ij sint 2 N & $\frac{1}{2}$. ut hic ducatur in duplum lateris Quadrati. Est ergo quam nosti aequatio. & fit 1 N, 17. ac primus eorum qui quaeruntur est 17. secundus 1, tertius 25.

XYLANDRI.

Vt hic ducatur *nescio enim quid aliud sibi uelint haec, τουτέστι κατὰ πλευρὰς β τῆς δυνάμεως. Duplicata autem aequatio sic soluitur. Sũma componentiũ interuallũ est 2 N † $\frac{1}{2}$. huius semissis 1 N † $\frac{1}{4}$, quadratum habet 1 Q † $\frac{1}{2}$ N † $\frac{1}{16}$. huic aequatur 1 Q † 1 N —— 1. Vtriq; parti 1 Q adime, & 1 adde, rursumq; $\frac{1}{2}$ N utrinq; aufer, aequabuntur $\frac{17}{16}$ & $\frac{1}{2}$ N. Ergo 1 N facit $\frac{17}{8}$. Et qui quaeruntur numeri sunt $\frac{17}{8}$, 1, & $\frac{25}{8}$. Solidus qui fit primo in secũdum, producto in tertium multiplicato, est $\frac{425}{64}$. Vnde si primũ, hoc est $\frac{136}{64}$ auferas, relinquitur quadratus $\frac{289}{64}$. Si secundum puta $\frac{64}{64}$, relinquitur quadratus $\frac{361}{64}$. si tertium, uidelicet $\frac{200}{64}$, relinquitur quadratus $\frac{225}{64}$. & abundè satisfit postulatis.*

XXV. Datum numerum in duos numeros diuidemus, ut qui fit altero in alterum multiplicato, sit cubus suo multatus latere. Sit numerus 6. partes ponantur 1 N & 6 —— 1 N. multiplicatio eorum producit 6 N —— 1 Q. Hoc aequatur cubo cui suum desit latus. Fingo cubũ lateris aliquot N —— 1. ac sit latus eius 2 N —— 1. cuius cubus, latere detracto, fit 8 C † 4 N —— 12 Q. hoc aequatur 6 N —— 1 Q. Heic si numerus N utrinq; fuisset aequalis, restabat ut C & Q aequarentur, & numero uero exprimeretur solutio. At 4 N ab excessu proficiscuntur supra 2 N: scilicet ex ter 2 N. & si ter 2 N amittãt 2 N, tum fiunt bis 2 N. At 6 illi dantur ex hypothesi. Eò itaq; redactus sum, ut quaerendus sit loco 2 N numerus aliquis, qui bis sumtus faciat 6. Is est 3. Ergo cum quaerã 6 N —— 1 Q aequales cubo cui suum deest latus: hoc ego pono 3 N —— 1. cuius cubus, ipso latere detracto est 2 C † 6 N —— 20 Q, quod aequatur 6 N —— 1 Q. fit 1 N, 26. Est ergo primus 26, secundus 136.

XYLANDRI.

*Postrema haec falsa esse omnia, uel caeco appareat. Nam cubus lateris 3 N —— 1 est 27 C —— 27 Q † 9 N —— 1. unde si ipsum latus auferas, relinquitur 27 C —— 27 Q † 6 N, quod residuum aequatur 6 N —— 1 Q. Aufer utrinq; 6 N, & adde utriq; 27 Q, aequatio erit inter 27 C & 26 Q. uides totum compendium in eo fuisse, quale latus cubi ad quem referenda est aequatio, poneretur. Caeterùm 1 N est $\frac{26}{27}$. Et cum hic sit altera diuidendi pars, qui propositus est nobis sex, siue $\frac{162}{27}$: altera erit $\frac{136}{27}$. Hic numerus per $\frac{26}{27}$ multiplicatus, producit $\frac{3536}{729}$. Quod an sit 6 N —— 1 Q, uideamus licet. 1 N est $\frac{26}{27}$, 1 Q ergo $\frac{676}{729}$. At 6 N sunt $\frac{156}{27}$. siue $\frac{4212}{729}$. aufer $\frac{676}{729}$, habes $\frac{3536}{729}$ residuum. Iam cubi latus est 3 N —— 1, hoc est $\frac{78}{27}$ —— $\frac{27}{27}$, nimirum $\frac{51}{27}$. Ergo ipse cubus $\frac{132651}{19683}$. unde si latus ipsius auferas, quod est $\frac{51}{27}$ seu $\frac{37179}{19683}$, relinquitur $\frac{95472}{19683}$. hoc est (nam hi numeri communem habent mensuram 27) $\frac{3536}{729}$. estq; satisfactum huic proposito. & quia non usq; adeò obuia est intellectu, rei, uolui eam rudioribus obiter commonstrare.*

XXVI. Datum numerum in tres partes diuidemus, è quibus ortus solidus, cu-

 bus sit,

bus sit, latus habens æquale summæ interuallorum quibus bini inter se distant. Diuidendus sit 4. solidus quem tres partes constituunt, sit 8 C (cubum enim esse oportet) lateris 2 N. Iam interualla primi & secundi, secundi & tertij, tertij & primi, iuncta duplum faciunt eius quod est inter tertium & primum. hoc est, Si tres fuerint numeri inæquales, trium interualla duplum sunt interualli extremorum. Numerorum autem & interuallorum summa debet esse eadem. Ponamus tertium primo maiorem interuallo 1 N, & sit primus 2 N (poteram quotuis N sumere) tertius erit 3 N. Cumq; solidus his tribus comprehensus sit 8 C: & primus in tertium ductus 6 Q producat: consequens est secundum fore $1\frac{1}{3}$ N. Hoc loco si secundus tertio minor, maior primo exstitisset: iam quæstioni satis erat factum. Verùm secundus prodijt diuiso 8 per id quod ex primo in tertium fiebat: primus autem & tertius nō sunt temerè sumti, sed qui unitate differant. Eò itaque deuenimus, ut quærendi sint duo numeri unitate differentes, ut per eum qui altero in alterum multiplicato gignitur, diuiso octonario, numerus exsistat minore maior, & maiore minor. Sit minor 1 N, maior 1 N † 1. productus eorum multiplicatione 1 Q † 1 N. per quem si 8 diuisis,

a $\frac{8}{1Q \dagger 1N.}$ erit medius [a]. is maior debet esse quàm 1 N, minor quam 1 N † 1. Quorum interuallum cum sit 1, etiam interuallum primi & medij minus unitate erit. Ergo secundus cum unitate maior erit primo. Secundus addita unitate, & resolutus in minutiam,

b $\frac{1Q \dagger 1N \dagger 8}{1Q \dagger 1N}$ fit [b]. hoc ergo maius est quàm 1 N † 1. & facta reductione 1 Q † 1 N † 8 maius est quam 1 C † 2 Q † 1 N. Auferantur similia à similibus, relinquitur 8 maius quàm 1 C † 1 Q. Fingamus cubum in quo contineantur 1 C † 1 Q. sitq; latus eius 1 N † 3. & quoniam 8 maius sunt quàm 1 C † 1 Q: cubus quoq; à dicto latere maior quàm 1 C † 1 Q æquemus etiam latera, 2 & 1 N † 3. Fit 1 N, 5. Iam ad ea quæ posueramus hoc accommodetur. Erit primus 8, secundus 9, tertius 5. & omnibus per 15 multiplicatis, primus 40, secundus 27, tertius 25, communi denominatore 15 reiecto. & inuenti sunt tres numeri, quorum ex multiplicatione ortus solidus, fit cubus, latus habens summam interualli eorum. Statuo itaq; primum 40 N, secundum 27 N, tertium 25 N. & solidus horum trium est cubus, cuius latus æquatur interuallis ipsorum coniunctis. Volo autem hos tres æquare unitatibus datis, numero scilicet proposito, qui est 4. Ergo 92 N æquantur 4. fit 1 N, $\frac{1}{23}$. Ad posita, primus erit 40, secundus 27, tertius 25.

## XYLANDRI.

*Solutio quidem uera est. Nam 1 N fit $\frac{1}{23}$. Primus ergo $\frac{40}{23}$, secundus $\frac{27}{23}$, tertius $\frac{25}{23}$. Pro quibus resecto denominatore soli numeratores 40, 27, 25 sufficiūt: cùm liqueat solido creato, etiam denominatorem fuisse cubicum exstiturum. Itaq; primo in secundum ducto fiunt 1080. hoc per tertium multiplica habes 27000, qui est cubus à latere 30. Sed & ipsorum numerorum interualla sunt 13, 2, 15. hoc est 30, uti postulabatur. Præterquam autem quod menda in Græco aliquot sunt, quas correximus inter uertendum: ualdè mutilata sunt ea, quæ explicatus habent admodum difficiles. Quæ de interuallorum summa dicuntur, ex dictis ad tertij quintam ac propositionem huius libri decimāquintam satis intelligi possunt. Enimuero 8 C æquat autor cubo à latere 1 N † 3 facto, qui maior sit quàm 1 C † 1 Q. itaq; latera etiam æqualia esse, cōmunis dictat notitia. Aequantur ergo 2 N & 1 N † 3. At sic 1 N non fit 5, sed 3. Oportuit ergo scriptū esse latus cubi 1 N † 5, ut 1 N fiat 5. hoc enim deinde in nouis hypostasibus tenuisse autorem apparet. Vtut sit, si 1 N & 1 N † 1 resoluas per ualorem 1 N, nunquam fiet, ut 8 diuisus per compositum ex illis, maior fiat eo qui loco 1 N ponitur. Nam si 1 N sit 3, quotiens erit $\frac{8}{12}$, seu $\frac{2}{3}$. Si 1 N est 5, quotiens erit $\frac{4}{15}$, utrobique minorum minor. Aliò igitur auertenda est hæc inuentio. & uidendum unde hypostases Diophanteæ $\frac{40}{15}$ $\frac{27}{15}$ $\frac{25}{15}$. emerserint, id est $\frac{8}{3}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{5}{3}$. nam id facile est ratiocinari, his eum porrò ad soluendam quæstionem usum esse positionibus. ac 1 N ei fuisse $\frac{2}{3}$. Arbitror (nihil enim adfirmo) explorato 5 non ualere pro 1 N, intellegisse autorem, per minutias rem agendam: & finxisse è conditione oblata hypostases, more suo. Hoc satis fuit euidens, ideo medium numerum non quadrare postulatis, quia extremarum multiplicatione nimis magnus produceretur numerus. Minor autem quin producatur, si illi essent minores, apertissimum est. Ergo pro 5, $\frac{2}{3}$ ponemus. sed res non succedet, quod expertus dico. Esto ergo 1 N, $\frac{2}{3}$. erit alter extremus $\frac{5}{3}$. Horum multiplicatione producitur $\frac{10}{9}$. per quem si diuidas 8,*

quotiens

*quotiens habebitur $\frac{9}{5}$. qui certè minore est maior, maiore minor. quod manifestum est, tribus numeris Diophanteis, ad communem decimarum quintarum partium denominationem redactis. Variari hoc poterat, nam $\frac{3}{4}$ etiam pro 1 N accepta nos expediuissemus rem. Sed & primæ positiones uariari infinitis possunt modis: quod persequi non est tempestiuum. Causam hypostaseon uides erutam. quæ reducta sub idem nomen, cur eo absoluantur, nolo inculcare. Cætera iam antè indicauimus. Ponuntur ergo $\frac{2}{5}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{8}{5}$, omnes signo N affecta, reducta omnes ad eundem denominatorem, eumq; postmodo missum factum. Atq; ita satisfit postulatis, hoc excepto, quòd non 4 (ut flagitabatur) sed alius numerus est summa partium. Reliqua liquent.*

XXVII. Dentur duo numeri, ut qui fit multiplicatione alterius in alterum, utrolibet adiecto cubum faciat. Primum pono aliquot N, quorum numerus sit cubicus, uerbi gratia 8 N. alterum 1 Q —— 1. Ita alteri postulatorum satisfit. Nam si alter in alterũ multiplicato ad productum adijciatur prior, cubus exsistet. Reliquũ est ut productus hic etiam posteriore assumto cubus fiat. Fit autem his coniunctis 8 C † 1 Q —— 8 N —— 1. quod æquatur cubo. Huius latus fingo 2 N —— 1. & fit 1 N, 14. Ergo iuxta positiones nostras, prior erit 113, posterior 27.

XYLANDRI.

*Si 113 per 27 multiplices, fient 3051. quibus siue 27, siue 113 addas, neutrubi cubum inuenies. Quod ad positiones attinet, cubum qui fieret primo ad productum numerorum addito, autor 8 C statuit, à quibus si 8 N (primus) detraherentur, superest 8 C —— 8 N, quod fit ex primo in secundum. id si per 8 N diuidas, utpote primum, secundus inuenitur 1 Q —— 1. Latus cubi propter 8 C & 1 abolendos in æquatione, statuitur 2 N —— 1. cubus est 8 C † 6 N —— 12 Q —— 1. huic æquatur 8 C † 1 Q —— 8 N —— 1. Vtrinq; 8 C abijciuntur, adduntur utriq; 12 Q & 1 & 8 N, ita fit æquatio inter 14 N & 13 Q. Ergo 1 N est $\frac{14}{13}$. Est ergo quæsitorum alter $\frac{112}{13}$, alter $\frac{196}{169}$ —— $\frac{169}{169}$ (1 Q —— 1) nimirum $\frac{27}{169}$. Multiplicato $\frac{112}{13}$ per $\frac{27}{169}$ producitur $\frac{3024}{2197}$. Huic si addas $\frac{112}{13}$, hoc est $\frac{18928}{2197}$, summa erit cubus $\frac{21952}{2197}$, lateris $\frac{28}{13}$. Sin eidem producto addas $\frac{27}{169}$, siue $\frac{351}{2197}$: summa erit $\frac{3375}{2197}$, cubus & ipse, à latere $\frac{15}{13}$. & satisfactum est quæstioni.*

XXVIII. Inueniantur numeri duo, quorum unius in alterum multiplicatione qui fit, utrolibet ipsorum detracto fiat cubus. Rursum primus ponatur 8 N, secũdus 1 Q —— 1 semper. Ita productus eorum multiplicatione, demto secundo, fit 8 C † 8 N —— 1 Q —— 1. hoc æquatur cubo. Est autem impossibile. Rursus primum statuo numerum N cubicum & 1. ac fit 8 N † 1. secundus 1 Q. uno in alterum multiplicato, & primo ab eo quod fit sublato, fit cubus. Rursum secundum si ab eodem producto auferamus, relinquitur 8 C † 1 Q —— 8 N —— 1 æquale cubo. hunc conficio à latere 2 N — 1, fit 1 N 14. & si ad posita id accõmodamus, primus est 125, secundus 196.

XYLANDRI.

*Confusa & uitiata hæc sunt in Græco. Cur priorem positionem impossibile gignere dicat, non exprimitur. Certè si 8 N in 1 Q —— 1 ducas, fit 8 C —— 8 N, unde si secundum auferas, habebis 8 C —— 1 Q —— 8 N —— 1. atq; ita textum uerborum autoris corrigas. Hoc si cum cubo lateris 2 N —— 1 (cum nullo enim alio possis) conferas, cum 8 C † 6 N —— 12 Q —— 1: nihil fiet absurdi. æquabuntur enim 14 N & 11 Q. Sed si primum de producto abstulisses, relinquebatur 8 C —— 16 N æquale cubo. cuius latus poni nullum potest quin absurdum incidas. Itaq; mutatur positio, & pro primo (in Græco primus & secundus inuerso ordine ponuntur. ad rem nihil interest: malui tamen seruire perspicuitati, maximè cum solutionis numeri eo ordine ab autore ponantur, ut inuersionem librario deberi appareat,) ponitur 8 N † 1, pro secundo 1 Q. nam ex his producitur 8 C † 1 Q, ut 1 Q primo abiecto, euidens sit 8 C restare cubum. Reliqua sunt eadem quæ in superiore propositione. Ergo 1 N heic quoque est $\frac{14}{13}$. fit primus $\frac{125}{13}$, secundus $\frac{196}{169}$. Hoc per primum multiplicato, fiunt $\frac{24500}{2197}$. Vnde si primus $\frac{21125}{2197}$ auferatur, supersunt $\frac{3375}{2197}$, cubus lateris $\frac{15}{13}$. Si ab eodem producto secundum, qui est $\frac{2548}{2197}$, auferas: relinquitur $\frac{21952}{2197}$ cubus, latus habens cubicum $\frac{28}{13}$. Ita hæc quoq; explicata esto quæstio.*

XXIX. Quæruntur duo numeri, quorum unius in alterum multiplicatione qui fit numerorũ summa tam addita quàm detracta ei, cubus sit. Sit cubus quem productus cũm summa numerorum conficit, 64. & cubus quem summa numerorum à producto subtracta relinquit, 8. Horum cuborum interuallum 56, duplum est sum-

mæ numerorum: horum ergo summa 28. Et quia productus cum summa facit 64, relinquitur productum esse 36. Eò itaq; loci deducta res est, ut duos numeros inueniam quorum summa sit 28, productus uno in alterum multiplicato 36. Esto maior 1 N † 14: erit minor 14 —— 1 N. reliquum est, ut qui fit uno in alterum multiplicato, nimirum 196 —— 1 Q. sit 36. Fit 1 Q æqualis 160. Quod si 160 esset quadratus numerus, soluta esset quæstio. Enimuero 160 est excessus 196 supra 36. Et 196 est quadratus numeri 14, qui est semissis de 28. itaq; 196 sunt semissis 28 in se ductus. At 28 semissis est de 56. ergo 14 sunt quadrans de 56. Est autem 56 interuallum duorum cuborum 64 & 8. & 36 est cuborum horum summæ semissis. Itaque eò redactus sum, ut quærendi mihi sint duo cubi, quorum interualli quadrans in se si ducatur, ipsorum cuborum semisse de quadrato qui sic fiebat subducto, quadratum relinquatur. Sit latus maioris cubi 1 N † 1, minoris 1 N —— 1. fiunt cubi, maior 1 C † 3 Q † 2 N † 1. minor 1 C † 3 N —— 3 Q —— 1 Horum interualli quadrans est $1\frac{1}{2}$ Q † $\frac{1}{2}$. qui si in se ducatur, fiunt $2\frac{1}{4}$ QQ † $1\frac{1}{2}$ Q † $\frac{1}{4}$. Vnde si semissem summæ cuborum, qui est 1 C † 3 N auferas, relinquuntur $2\frac{1}{4}$ QQ † $1\frac{1}{2}$ Q † $\frac{1}{4}$ —— 1 C —— 3 N. hoc æquatur quadrato. Sed propter minutias omnia multiplicentur prius per 4. erunt 9 QQ † 6 Q † 1 —— 4 C —— 12 N. Huic æquabimus quadratum, cuius latus sit 3 Q † 1 —— 6 N. Est ergo quadratus 9 QQ † 42 Q † 1 —— 36 C —— 12 N, æqualis 9 QQ † 6 Q † 1 —— 4 C —— 12 N. Additis & detractis utrobique æqualibus, tandem 32 C æquantur 36 Q. fit 1 N $\frac{9}{8}$. Iam ad ea quæ posueramus hoc conferatur. Cuborum latera posuimus, maioris 1 N † 1, minoris 1 N —— 1. erit hoc $\frac{17}{8}$, illud $\frac{1}{8}$. Cubi ergo ipsi, maior $\frac{4913}{512}$, minor $\frac{1}{512}$. Venio nunc ad id quod erat initio propositum, ac quæro, quomodo duo numeri dentur, quorũ productus uno in alterum multiplicato, cum summa ipsorũ numerorũ coniũctus, cubũ $\frac{4913}{512}$ faciat. idemq; productus summa eorũ multatus, cubũ $\frac{1}{512}$ relinquat. Et quoniam interuallũ horũ cuborũ duplũ est summæ numerorũ, estq; hoc interuallũ $\frac{4912}{512}$: summa ipsorũ numerorũ erit $\frac{2456}{512}$. Ac quãdo productus cũ summa coniũctus, facit $\frac{4913}{512}$, & summa est $\frac{2456}{512}$: productus ergo erit $\frac{2457}{512}$. Quod reliquũ est ut conficiatur, demonstratũ est libro primo: sed explicandę causa quęstionis denuò ostẽdamus. Ponamus primũ 1 N cũ semisse summę ipsorũ, hoc est 1 N † $\frac{1228}{512}$. erit secũdus $\frac{1228}{512}$ — 1 N. summa eorũ utiq; $\frac{2456}{512}$ est. Sed uno in alterũ multiplicato, pducitur $\frac{1507984}{262144}$ — 1 Q. atq; hoc ęquatur $\frac{2457}{512}$. reducãtur cętera quoq; ad idẽ partiũ nomẽ, & auferãtur ęqualia ab ęqualib. ęquatio erit inter 262144 Q & 25 fit 1 N $\frac{500}{512}$. ad positiões hoc si cõferatur, erit prim⁹ $\frac{1728}{512}$, secũd⁹ $\frac{728}{512}$, & euidẽs est demõstratio.

XYLANDRI.

*Valde est arguta huius quæstionis tractatio. & quamuis mendosa sunt multa, tamen ea corrigere non fuit laboriosum. Denominatores passim omissi, tenebras rei offuderunt. Quod de primo libro dicit, uide eius propositionem trigesimam, & qua nos ibi docuimus. Sed ultimam partem more nostro expediamus, cũ habeat nonnihil perplexitatis. Aequatio est inter $\frac{1507984}{262144}$ — 1 Q, & productum $\frac{2457}{512}$. Si addatur utrobiq. 1 Q, & utrinq. abyciatur $\frac{2457}{512}$ siue $\frac{1257984}{262144}$: æquatio erit inter $\frac{250000}{262144}$ & 1 Q: (noster inter 250000 ponit & Q 262144, reducta æquatione, & nihilominus re ad id quod nos agimus, recidente. Nam κε̄ in Græco 25 myriades significare oportet.) Ergo 1 N fit $\frac{500}{512}$. Primus ergo 1 N † $\frac{1228}{512}$, erit $\frac{1728}{512}$. secundus $\frac{1228}{512}$ —— 1 N, erit $\frac{728}{512}$. Omitti hoc loco denominatores nullo modo possunt, nisi omnia uelis deprauare. Est enim in se multiplicandus denominator, & numerator alterius item multiplicando ad denominationis æqualitatem perducendus. ut mox patebit. Ipsas etiam minutias si ad minores redigeremus terminos; rationes turbaremus nostras. cubicum enim oportet esse denominatorem. qui in se ductus, etsi producat quadratum, cubus tamen etiam est ille quadratus, ut uel ex elementis Algebricis liquet. Superest ut experiamur, satisfaciant ne numeri à nobis inuenti postulatis quæstionis. Certè si omisso denominatore 1728 in 728 multiplices, 1257984 producetur. cui si summam numerorum horum addas, consit 1260440, nequaquam cubus. si summam producto adimas, superit 1255528, nihilo magis cubus. At si $\frac{1728}{512}$ per $\frac{728}{512}$ multiplices, producetur $\frac{1257984}{262144}$. Summa numerorum est $\frac{2456}{512}$, ad idem producto nomen redacta, $\frac{1257472}{262144}$. Quin denominator sit cubus nemo arithmetica initiatus dubitabit. Itaq. eum nunc demũ seponamus, & 1257472 addamus ad 1257984: hoc est de numeratorib. uiderimus, sint ne cubici. Sũma est 2515456, cubus: latus eius*

*tus eius 136. Auferamus 1257472 de 1257984, relinquētur 512. quē esse cubū, pueri nosse debebāt.*

XXX. Aliter hoc ipsum consequemur. Hac in re scias, quòd si sit quiuis quadratus diuisus in duas partes, quarū altera sit latus eius; harū partiū altera in alterā multiplicata, & additis producto ipsis partibus, cubus fit. Statuatur itaq; quadratus 1 Q, & diuidatur in 1 N, ac reliquū quod est 1 Q—1 N. fiet productus ex parte in partem cum summa partium, 1 C, cubus. Superest, ut productus idem summa partium detracta, cubus sit. At fit hoc modo 1 C—2 Q. hoc æquatur cubo qui sit minor quàm 1 C. ac sit $\frac{1}{8}$ C. Omnia per octo multiplicentur, erunt 8 C—16 Q æquales 1 C. fit 1 N $\frac{16}{7}$, ac tantus est primus. secundus ergo $\frac{144}{49}$.

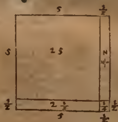
XYLANDRI.

*Numeri solutionis æquationis & quæstionis omisso denominatore erant corrupti. Est autem scitū theorema de quadrato numero, quod huc adhibetur, & causa eius in promptu. Nam si (uerbi gratia) quadratū 49 diuidas in 7 & 42. & 7 per 42 multiplices, fiunt 294. heic ad cubū septenarij implendum nihil desideratur, præter id quod fit ex 7 in reliquā totius 49 quadrati partē, nēpe in 7. at quod fit, est summa ipsarum partiū. Porrò si $\frac{16}{7}$ in $\frac{144}{49}$ multiplices, gignetur $\frac{2304}{343}$. Sūma ipsorū $\frac{256}{49}$, seu $\frac{1792}{343}$. hac addita pducto, facit $\frac{4096}{343}$, cubū lateris $\frac{16}{7}$. detracta ab eodē, relinquit $\frac{512}{343}$, cubū lateris $\frac{8}{7}$. Aliā solutionē habuisses, si in æquatiōe p $\frac{1}{8}$ C, posuisses $\frac{1}{27}$ C, &c. aut p 1 Q, sumsisses 4 Q, &c. potest enim infinities uariari hoc. Sed in minimis cū Dioph. acquiescam⁹.*

XXXI. Quatuor numeri quadrati dentur, quorū summa cū summa laterū cōiuncta, numerū imperatū cōficiat. Ac sit is numerus 12. Omnis quadratus numerus, suo latere & unitatis quadrante auctus, quadratum exhibet, cuius latus semisse unitatis multatū, fit prioris quadrati latus. Ergo quos quærimus quatuor numeri, ij suis aucti lateribus, 12 faciunt: & si quatuor insuper quadrātibus unitatibus augeātur, quatuor cōtinebūt quadratos. Sic aūt 12 excrescit in 13: addita nimirum unitate. Ergo 13 diuidēdus est in quatuor quadratos, ut si de singulorū lateribus semissem unitatis auferam, latera habeam quatuor quæsitorum quadratorum. Diuiditur autem 13 in duos quadratos, 4 & 9. & rursus horum uterq; in alios duos quadratos, in 64, 144, & 81. Sumo cuiusq; latus *, & à quouis aufero $\frac{1}{2}$. erunt latera quadratorum qui quæ- *
runtur, 11, 7, 19, 13. ipsi ergo quadrati 121, 49, 361, 169.

XYLANDRI.

*De numeris quadratis agi, satis est manifestum, etsi in propositione uox τετραγώνους excidit. falso etiā scriptum fuisse μονάδας τέσσαρες pro μονάδος τέταρτον, res ipsa docet. Theorema enim hoc de quadratis numeris est ex quarta secundi Euclidis desumptum. Nam si lateri cuiuscunq; quadrati adijcias $\frac{1}{2}$, & gnomonem isti quadrato circumponas, utrunq; eius supplementorum faciet semissem lateris, & ambo iuncta, lateri æquabuntur. quadratulū autē gnomonis semper est $\frac{1}{4}$. Totius aūt sic facti quadrati latus, supra latus prioris quadrati habere $\frac{1}{2}$, uel ex hypothesi notū est. Ita heic quadratū 25, lateris 5. descripsi. adieciq; lateri $\frac{1}{2}$. fit totū maioris quadrati latus $5\frac{1}{2}$. supplementum utrunq; $2\frac{1}{2}$, ambo iuncta 5. quadratum in gnomone $\frac{1}{4}$. totus gnomo $5\frac{1}{4}$. totū quadratū eo auctum, $30\frac{1}{4}$. Cæterùm diuisio numeri 13 in quadratos quatuor mutila est, ut & reliqua deinceps. & quid sit πλάτος τὸ θ non possum intelligere. Quia aūt suprà lib. 2 prop. 8. & 9 nos Dioph. rē docuit, eius auspicijs heic propositū absoluemus. Notissimū est 13 componi additione duorū quadratorū, 4, & 9. Horum uterq; in alios duos quadratos est diuidendus. Diuidamus*




*quadratū 4 in duos quadratos. sit alter 1 Q, alter 4—1 Q. huic quadratū æqualē fingamus à latere 2 N—2, is erit 4 Q † 4—8 N. fiūt quadrati $\frac{64}{25}$ & $\frac{36}{25}$. diuidamus quadratū quoq; 9 in duos quadratos. Sint eorum latera 1 N & 2 N—3, quadrati 1 Q & 4 Q † 9—12 N. summa 5 Q † 9—12 N æqualis 9. fit 1 N $\frac{12}{5}$. ergo quadrati sunt $\frac{144}{25}$, & $\frac{81}{25}$. Quatuor ergo quadrati, quorū summa 13, sunt $\frac{64}{25}$. $\frac{36}{25}$. $\frac{144}{25}$. $\frac{81}{25}$. Latera horum $\frac{8 \quad 6 \quad 12 \quad 9}{5}$. de quorum uno quouis ubi detraxeris $\frac{1}{2}$, restabūt latera quæsitorū quadratorū. Vt expeditè subtrahas, omnia in decimas partes cōuerte. sic de $\frac{16 \quad 12 \quad 24 \quad 18}{10}$ auferes $\frac{5}{10}$ supererūt $\frac{11 \quad 7 \quad 19 \quad 13}{10}$ ipsa latera. erūt ergo quadrati $\frac{121 \quad 49 \quad 361 \quad 169}{100}$. Sūma horū quadrator. $\frac{700}{100}$, hoc est 7. adde 5 (nā summa laterū est $\frac{50}{10}$) habes impatū numerū 12.*

*Si propositus numerus fuisset 1202. quadrati fuissent 625.289.144.81. quod licet experiri, & ratiocinari ad modum præscriptum.*

XXXII. Quærantur quadrati quatuor, quorum summa, detracta laterum summa, numerũ exhibeãt præscriptũ. Sitq; is 4. Enimuerò quiuis quadratus numerus, si suo multetur latere, & residuo $\frac{1}{4}$ unitatis accedat, quadratus fit, cuius latus semisse unitatis auctũ, latus pristini quadrati præstet. Ergo hi quoq; quadrati quatuor, suis singuli multati lateribus, si residuorũ summæ accedãt quatuor quadrãtes, id est 1, quatuor quadratos æquabũt. At multatorũ laterib. summa ponitur 4. ergo 1 adiecta, fient 5. Proinde hoc mihi datur negocij, ut quinq; diuidã in quatuor quadratos numeros, quorũ singulorũ laterib. ubi adiecero $\frac{1}{2}$ unitatis, repperero iã latera postulatorũ quadratorũ. At 5 diuiditur in quadratos 9, 16, 64, 36. horũ laterib. 3, 4, 8, 6, singulis $\frac{1}{2}$ adijcio, inuenioq; latera 11, 13, 21, 17. Ergo qui postulabantur quadrati, sunt 121, 169, 441, 289.

XYLANDRI.

*Denominatores omisi: omnia falsa de ueris redigunt. Theorema ex 4 & 7 secundi Euclidis & typo ad superiorem propositionẽ posito intelligi poteit. de quadrato 121 latus 11 aufer, supersunt 110. adde $\frac{1}{4}$. habes quadratũ $\frac{441}{4}$, cuius latus $\frac{21}{2}$. adde $\frac{1}{2}$, habet 11, latus pristini quadrati. Porrò quinarius in duos quadratos 1 & 4 rectà diuiditur. Vnitatẽ diuidamus in duos quadratos. sint latera 1 N & 2 N — 1, quadrati 1 Q & 4 Q — 4 N † 1. Summa 5 Q — 4 N † 1 æquatur 1. fit 1 N, $\frac{4}{5}$. ergo quadrati $\frac{16}{25}$ & $\frac{9}{25}$. Iam 4 in duos quadratos diuidamus, ut suprà est factum. Sunt ergo quadrati, quorũ summa 5 conficiat $\frac{16 \quad 9 \quad 64 \quad 36}{25}$. latera $\frac{4 \quad 3 \quad 8 \quad 6}{5}$ addantur singulis $\frac{1}{2}$, fient $\frac{13 \quad 11 \quad 21 \quad 17}{10}$ sunt ergo quos quærebamus quadrati $\frac{169 \quad 121 \quad 441 \quad 289}{100}$. Quorum summa $\frac{102}{10}$ seu $10\frac{1}{5}$. At laterum summa est $\frac{62}{10}$, seu $6\frac{1}{5}$. quo ab $10\frac{1}{5}$ subtracto, quatuor superant, uti poscebatur. Poterat sic proponi, ut loco 4, numerus 1430 præscriberetur. soluissent quæstionem 36, 121, 441, 900, &c.*

XXXIII. Vnitatẽ in duos diuidemus numeros, & utriq; datum aliquem numerũ adijciemus, & summa altera in alteram multiplicata quadratum producemus. Sint adijciendi 3 & 5. Pono partium alteram 1 N, ergo altera erit 1 — 1 N. illi si 3 addo, fiunt 1 N † 3: huic si 5 addo, fiunt 6 — 1 N. hac summa per illam multiplicata, producuntur 3 N † 18 — 1 Q, quæ æquantur quadrato. sitq; is 4 Q. & addatur utriq; quod alteri deerat, fit 5 Q æquales 3 N † 18. quæ æquatio rationalis nõ est. Verum 5 Q quadratus sunt cum unitate. oportet autem hoc multiplicato in 18, & addito quadrato semissis eius numeri qui ad N est adscriptus, hoc est addito $2\frac{1}{4}$ fieri quadratũ. Itaq; eò redactus sum, ut quærã quadratũ qui unitate auctus, itaq; per 18 multiplicatus si sit, producto $2\frac{1}{4}$ additis fiat quadratus. Esto hic 1 Q. Ergo iam 18 Q † $20\frac{1}{4}$ æquantur quadrato. Omnia per denominatorẽ multiplica. 72 Q † 81 æquãtur quadrato, cuius latus fingo 8 N † 9. fit 1 N, 18. ergo is quadratus est 324. Ad posita hoc aptemus & 3 N † 18 — 1 Q æquemus quadrato. statuo nũc 324 Q, & fit 1 N unitates 78, hoc est 6. Ergo secundum posita primus numerus est 6, alter 19.

XYLANDRI.

*Doctè heic Diophãtus est locutus: ita ut nõ quiuis sit adsecuturus quid sibi uelit. Explicemus ergo. Aequatio inter 5 Q & 3 N † 18 est ex compositarũ genere, ad septimã Christiferi Rodolfi regulã pertinẽs, quam demõstrauimus ad sextã secũdi Euclidis. Sic aũt eã oportet tractare. 1 Q æquabitur $\frac{3}{5}$ N † $\frac{18}{5}$, omnib. per 5 diuisis, qui numerus fuit à quadrato unitate aucto (à 4 Q & 1 Q) profectus. Heic iã Diophantus semissem de $\frac{3}{5}$ (ut præcipit canon,) scilicet more suo [a] in se multiplicat, fiunt [b]. quibus ut adijci possint $\frac{18}{5}$ necesse est 18 nõ minus quàm 5 per 5 multiplicari, ut fiant $\frac{90}{25}$. qui ad [c] additi, cõficiunt [d]. ac denominator quidem interim omitti potuit, quem fieri 25, & habere radicẽ quadratã, in prõtu est. Canon aũt iã requirit ut de $92\frac{1}{4}$ etiã numeratore, radix quadrata accipiatur. quod fieri nequit, cùm $\frac{369}{4}$ minutiæ numerator 369, numerus sit (ut uocat) surdus. Alius ergo in prima æquatione numerus Q adijciendus fuit, qui & quadratus esset, & unitate auctus, sic in 18 ductus, adscitis $2\frac{1}{4}$, quadratũ haberet radicẽ, ut explicari porro æquatio secundũ canonẽ possit. Si nostrã cõsuetudinẽ respicias, semipsis de $\frac{3}{5}$ erat $\frac{3}{10}$, quadratus eius $\frac{9}{100}$. cui ut addas $\frac{18}{5}$, 18 & 5 per 20 sunt multiplicanda, fiunt [illegible], & additis $\frac{9}{100}$, fiunt $\frac{369}{100}$. qui est surdus iterũ numerus, ut non difficile sit nouã illã quadrati inuentionẽ etiã huc accommodare. Porrò quòd per 4 denominatorẽ omnia iubet multiplicari autor, prudenter facit.*

a $\frac{1\frac{1}{2}}{5}$

b $\frac{2\frac{1}{4}}{25}$

c $\frac{2\frac{1}{4}}{25}$

d $\frac{92\frac{1}{4}}{25}$

est

*est enim 4 quadratus. & cùm 18 Q † 20$\frac{1}{4}$ aequētur quadrato, etiā eorū quadruplū quadrato aequabitur. Cuius latus cur fingatur 8 N † 9, obscurū nō est. scilicet ut 81 utrinq; sublatis, aequatio sit inter Q & N. nā quadratus fit 64 Q † 144 N † 81 aequalis 72 Q † 81. utrinq; abiice 64 Q † 81 restāt 144 N aequales 8 Q. & 1 N est 18. Posterioris aequationis explicationē, quia mutila ad nos peruenit, integrā de nostro largimur lectori. 3 N † 18—1 Q aequātur 324 Q. ergo 325 Q aequātur 3 N † 18. & 1 Q aequabitur $\frac{3}{325}$ N † $\frac{18}{325}$. semissis de $\frac{3}{325}$ est more nostro $\frac{3}{650}$. eius quadratū $\frac{9}{422500}$. huic ut addere possis $\frac{18}{325}$, cū 325 denominatorē iā factū metiatur numero 1300, 18 per 1300 multiplicabis, & addes 9 fient $\frac{23409}{422500}$. Huius radix quadrata est $\frac{153}{650}$. quibus si accedant $\frac{3}{650}$ habes 1 N ualorē $\frac{156}{650}$, seu $\frac{78}{325}$ (ita enim in Graeco fuit) hoc est $\frac{6}{25}$. nā cōmunis mensura numerorum 78 & 325 est 13. Partes ergo in quas unitas diuiditur, sunt $\frac{6}{25}$ & $\frac{19}{25}$. Adde maiori 3, minori 5 (ita enim accipiendam esse uoluntatē autoris, hypostases docuerunt:) fient $\frac{81}{25}$ & $\frac{144}{25}$. cumq; numeratores quadrati, ut dubiū quidē est, quia quadratū sint producturi ex secūda noni Euclid. apud Campanū, de denominatore satis constat fore quadratum si in se ducatur, etsi quadratus non fuisset. fit autem $\frac{11664}{625}$, cuius latus $\frac{108}{25}$.*

XXXIV. Aliter unitatē in duas diuidemus partes, & utiq; addito qui datur seorsim numero, summa altera in alterā ducta quadratū producemus. sintq; addēdi partib. 3 & 5. Esto pars altera 1 N—3 (eo scilicet numero egens, quem addere ei iubemur) erit altera 4—1 N. Priori si addas 3, fit 1 N. posteriori si 5, fit 9—1 N Ex harum multiplicatione exsistit 9 N—1 Q, quod aequatur quadrato. Sitq; hic 4 Q fit 1 N, $\frac{9}{5}$. Si ad positiones hoc applicare coner, detrahere 3 ab $\frac{9}{5}$ non possum. Oportet ergo 1 N ita poni, ut maior sit quàm 3, minor quàm 4. Porrò 1 N esse $\frac{9}{5}$ inuentum est eo quòd 9 diuidebamus per 5. at 5 est quadratus cum 1. Iam si 9 diuisus per quadratum aliquē unitate auctum, facit 3, utiq; per quem diuiditur, is erit 3. Est ergo 3 quadratus unitate auctus. Ea abiiciatur. relinquitur 2 quadratus. Rursus secundam partem uolumus diuisam per quadratum unitate auctum facere 4. Ergo per quem diuiditur 9, is est quadratus unitate auctus. Ergo quadratus cum unitate maior est $12\frac{1}{4}$. Et tollatur unitas, ergo maior quadratus est $1\frac{1}{4}$. ostensum est etiam secundam partem esse quadratū. Proinde eò deducitur res, ut quadratus sit inueniendus maior quàm $1\frac{1}{4}$, minor quàm 2. resoluo hęc in partes quadrati sexagesimasquartas. fiūt 80 & 128. Est aūt hoc facile. estq; quadratus 100, hoc est 25. Reuertor ad id quod initio erat propositum. Quęrebam 9 N—1 Q ut aequarentur quadrato, nimirum iam inuento ęquentur 25 Q. fit 1 N, 124. ergo secundum posita, prior pars est 21, altera 20.

XYLANDRI.

*Mirificè obscura sunt haec, & deprauata insuper. Certè 9 N—1 Q aequales 25 Q, 1 N faciunt $\frac{9}{26}$, non 124. Atq; 21 & 20 si ponantur unitatis partes, denominatorem oportebit intelligi 41, qui componitur ex quadratis 25 & 16, siquid hoc fortè ad rem faciat. Certè $\frac{21}{41}$ & $\frac{20}{41}$ sunt numeri, quibus quaestio explicatur. Nam si 3 ad illum, 5 ad hunc adiicias, fient $\frac{144}{41}$ & $\frac{225}{41}$ (cùm 3 sint $\frac{123}{41}$, & 5 sint $\frac{205}{41}$.) qui sua multiplicatione omnino quadratum facient, ob causam ad finem superioris propositionis traditam. fit autē $\frac{32400}{1681}$, hoc est $\frac{180}{41}$. Porrò $\frac{21}{41}$ & $\frac{20}{41}$ sunt 1. & nihil est quod in solutione hac desideres. Iā cùm $\frac{144}{41}$ fiat 3 ad $\frac{21}{41}$ additis, satis liquet 1 N esse $\frac{144}{41}$, cui si adimas 3, scilicet $\frac{123}{41}$, relinquatur 1 N—3, nempe $\frac{21}{41}$. Itē si de 4, hoc est de $\frac{164}{41}$, auferas $\frac{144}{41}$, qui est 1 N, manent 4—1 N nimirū $\frac{20}{41}$, altera pars unitatis diuisa. itaq; omnino satisfit etiā hypostasibus nostris. Videamus aūt unde 1 N efficiatur $\frac{144}{41}$. Vnde, inquies? hinc adeò, quòd 9 N—1 Q comparantur & aequantur cum quadrato nō 25, sed $\frac{25}{16}$ Q. Si enim utrobiq; additur 1 Q, fiunt 9 N aequales $\frac{41}{16}$ Q, uel characterib. depressis, 9 aequantur $\frac{41}{16}$ N. diuide 9 per $\frac{41}{16}$, habes 1 N aestimationem, $\frac{144}{41}$. In Graeco itaq; pro ρκδ scribendum ρμδ. & addendus denominator μα. Sed & pro $12\frac{1}{4}$, ιβ δ΄, scribi debet β δ΄ $2\frac{1}{4}$. Nam si 9 per 4 diuidas, quotiens est $2\frac{1}{4}$, unde si auferatur 1, relinquitur $1\frac{1}{4}$. Ergo quadratus intra has metas inueniēdus erat, intra 2 & $1\frac{1}{4}$, aequandus 9 N—1 Q, qui quadratus unitate adscita cum 9 N comparetur. Hoc ut fieri posset, cùm satis appareat per minutias rem confore, numerum 64 pro denominatore delegit autor. ita 2 fiūt $\frac{128}{64}$ & $1\frac{1}{4}$ fiunt $\frac{80}{64}$. Inter haec incidunt quadrati $\frac{81}{64}$ & $\frac{100}{64}$ & $\frac{121}{64}$. de quibus optione data Diophantus delegit $\frac{100}{64}$, quod est $\frac{25}{16}$. Quod si $\frac{81}{64}$ delegisset, N erat futurus $\frac{576}{145}$. partes unitatis $\frac{141}{145}$ & $\frac{4}{145}$. illi 3, huic 5 si addas, fient $\frac{576}{145}$ & $\frac{729}{145}$, quorum numeratores quadrati: itaque etiam ex iis productus quadratus, ut suprà fuit demonstratum. Idem de quadrato $\frac{121}{64}$ experiri*

*experiri licet: nam certiores conficietur. Hinc etiã uidere licet quantis cum difficultatib fuerim conflictatus, & quid beneficium analyseos possit.*

XXXV. Datum numerum diuidemus in tres numeros, ea lege, ut qui fit primo in secundum multiplicato, siue ei addas tertiũ, siue adimas, quadratus exsistat: Sit datus numerus 6. Statuatur pars tertia 1 N, & secundus unitate amplior, sit 2. Ergo primus erit 1 —— 1 N. restat ut qui fit multiplicatione secundi in primum, tam detracto quàm addito tertio sit quadratus. fit æquatio duplex, 8 —— 1 N æquantur quadrato, & 8 —— 3 N æquantur quadrato. Non est autem rationale, quia numerorum inter se ratio non est quæ quadrati ad quadratum. Sed primus numerus unitate minor est secundo: & tres numeri similiter maiores secundo. Eò itaq; res deducta est, ut inueniendus sit numerus ad secundum, ut qui cum unitate excedit ad unitatem
* quadratũ numerũ. Sit is qui quæritur 1 N. qui unitate eo maior sit, erit 1 N ✝ 1. qui unitate minor, 1 N —— 1. Hos uolumus inter se rationem habere, quæ est quadrati numeri ad quadratum. Sit 4 ad 1, ut 1 N — 1 ad 4. fiunt 4 N — 4 & 1 N ✝ 1 ad 1. & sunt hi expositi numeri ea inuicẽ rationẽ, quæ est quadrati ad quadratũ. nunc ergo 4 N —— 4 æquantur 1 N ✝ 1. fit 1 N, 5. Statuo itaq; secundũ 5. tertius autem est 1 N. primus ergo est 13 —— 1 N. Restat ut qui fit ex primo in secundum tam detracto quàm addito tertio fiat quadratus. Sed qui fit ex primo in secundum cum tertio est 65 —— 2 N, æquale quadrato. & idem demto tertio 65 —— 6 * omnia per 9 fiunt 65 —— 70 N æquales quadrato: & 65 —— 24 N æquales quadrato. Exæquo numeros æquationis unius, multiplicans per quatuor, fiunt 260 —— 24 N æquales quadrato, & 65 —— 24 N æquales quadrato. horũ nunc interuallum sumo 195, & statuo duos numeros, quorũ uno in alterũ ducto fiant 195. ij sunt 13 & 15. horũ interualli semissis in se, æquat minori quadrato. fit 1 N, 8. Ad posita, primus erit 5, secundus 5, tertius 8, & demõstratio est euidens.

XYLANDRI.

*Nihil deprauatius excogitari potest. itaq. metuo ne oleum & operã (quam aiunt) perdam, si castigare coner. Ex solutione quæstionis apparet, agi de senario diuidẽdo in tres partes, ut prima in secundã ducta qui fit numerus, tertia uel addita uel detracta fiat quadratus. itaq. mendũ* ος *pro* ο ς *nihil nos moratur: neq. est insolens in hoc libro. Partes sunt* $\frac{5}{3}$. $\frac{5}{3}$. & $\frac{8}{3}$. *summa* $\frac{18}{3}$, *hoc est 6 prima in secundam multiplicata fit* $\frac{25}{9}$. *adde* $\frac{8}{3}$ *seu* $\frac{24}{9}$, *habes quadratũ* $\frac{49}{9}$. *Itẽ de* $\frac{25}{9}$ *aufer* $\frac{24}{9}$, *relinquitur quadratus* $\frac{1}{9}$. *de duplicata æquatione satis multa suis diximus locis: sed heic omnia ita sunt, ut dixi, corrupta: ut diuinare uix liceat. Sed experiamur tamẽ.* Secũdus unitate amplior.) ὁ δεύτερος μο̄ ὑπερέχων τοῦ β̄ ἴσω μο̄ β̄. *Intelligendũ putaui, secundum duab. unitatibus maiorẽ poni semisse propositi ad diuidendũ numeri. Is cũ sit 6, semissem habet 3. ergo secũdus statuetur 5 & cum tertius sit 1 N positus, primo relinquetur, ut est in textu, 1 —— 1 N. Causam uellẽ Diophãtus harũ positionũ reddidisset: si quidẽ nõ intercidit. quod ille fideliter tradiderat. Certè qui in textu sunt numeri, 1 —— 1 N, 2, & 1 N, totũ diuidendũ, 6, nequaquã conficiunt, sed eius duntaxat semissem. ut dubiũ nõ sit, secundũ falsò perhiberi 2, pro 5. siquidẽ reliqui rectè habeant. Nã 6 diuidendũ esse, uel solutio quæstionis euincit. At enim primo in secundũ ducto, fit 5 —— 5 N. cui si tertius addatur, 1 N, fient 5 —— 4 N. Si adimatur, 5 —— 6 N erunt. Hæc cũ Diophanteis iã nequaquã cõsentiunt. Certè 8 —— 1 N est autori nostro productus ex primo in secũdu, addito tertio 1 N. ergo ipse productus fuit 8 —— 2 N. atqui primus expressè per-*
a 8 — 3 N / 1 — 1 N *hibetur 1 —— 1 N. ut necesse fuerit secundũ poni,* [a] *quod quale sit, non sanè perspicio. Hæc ergo neq. cohærent, neq. coniecturis explicari cõmodè possunt. Cur rationalẽ esse negat duplicẽ æquationem? quasi uerò nullã talẽ duplicatã æquationẽ antea tractauerimus? uel hoc ipso libro prop. XIV & XXIV uidebis exempla. Sed istud artificium locum heic non habet. nam si interuallum 8 —— 1 N & 8 —— 3 N, quod est 2 N, componamus, uerbi gratia, ex* $\frac{1}{2}$ *& 4 N, erit æquatio inter 4 Q ✝ 1 N ✝* $\frac{1}{16}$ *& 8 —— 1 N, inexplicabilis: ut uidetur. Quod simili modo eueniet, si 5 —— 4 N & 5 —— 6 N consideres. Hoc ergo uidetur autor dicere, non esse numeros quadratorum similes, quod diuersa species componuntur, Q scilicet, N. & unitates. neq. fictione quadrati uidetur expediri æquatio explanariq. res posse. Has igitur hypostases missas faciamus. & rem hoc pacto attentemus. Theorema, cui Diophantea innititur ratio, non est expressum: ipsa autem miserè confusa. Ariolemur quantum possumus. Nam primũ quidẽ secũdo maiorẽ unitate*

*unitate ponere autor neq; uoluit, neq; potuit, si solutionē respicias; quātumuis id uerba præ se ferant. Sed uoluit secundum ita unitate differre à tertio atq; superari, ut si unitas & adderetur & adimeretur secundo, residui ad summā ratio esset quæ est quadrati ad quadratū quos sumsit more suo minimos (uariari enim isthæc potuisse manifestū est.) Cùm ergo ponitur secundus 1 N: & 1 N † 1 ad 1 N — 1 ea ratione, quæ est 4 ad 1: per 19 septimi Euclidis æquatio exsistit inter 1 N † 1 & 4 N — 4. ac fit 1 N, $\frac{5}{3}$. (nouum non est, quod in Diophanto 5 scribitur, denominatore omisso.) Caussam huius instituti eam esse ratiocinor, quod ultimo posito 1 N, reliquorū multiplicatione 1 Q — 1 N produci oportuit, si 1 N addito debuit esse quadratus. 1 Q † 1 N iisdem, & 1 N detracto relinquendus ex hypothesi fuit quadratus. Persequamur cetera. Cùm secundus sit $\frac{5}{3}$, & tertius 1 N. summa trium 6, necesse est primū esse 6 — $\frac{5}{3}$ — 1 N, hoc est $\frac{13}{3}$ — 1 N. Multiplicetur primus in secundum, fit $\frac{65}{9}$ — $\frac{5}{3}$ N. adde tertium, hoc est 1 N, habebis $\frac{65}{9}$ — $\frac{2}{3}$ N. Itē aufer tertiū de producto primi in secundū, habes $\frac{65}{9}$ — $\frac{8}{3}$ N. Hæc per 9 (ut denominatorem) multiplicata, rediguntur ad integros numeros 65 — 6 N & 65 — 24 N. Argutum porrò est quod quadruplicando 65 — 6 N, effingit 260 — 24 N. ut N se abolentibus, æquatio consistat in absolutis unitatibus. atq; huius adeò rei caussa æquatio illa superior adhibita fuit. nam 6 N & 24 N sunt ut quadratum ad quadratum. quod secus erat in duplicatis æquationibus 8 — 1 N & 8 — 3 N. itemq; 5 — 4 N & 5 — 6 N. Internallū inter 260 — 24 N atq; 65 — 24 N est 195. Id autor cōponit ex 13 & 15. quorū internalli semissis quadratū habet 1, quod æquetur 65 — 24 N. hoc est 64 æquantur 24 N. Fit ergo 1 N, $\frac{8}{3}$ & secundus est $\frac{5}{3}$. summa omnium 6. Ergo primo etiam $\frac{5}{3}$ relinquuntur. Ita prius deploratum problema, tamen sibi restituimus: subtilissimum, & obseruatu apprimè dignum.*

XXXVI. Inueniantur duo numeri, ut si alter ab altero eandē partē siue easdē partes acceperit, ratio ad reliquū sit ea quæ poscitur. Iubemur addere primo secūdi partē uel partes, itaq; reliqui esse triplū. secundū aūt, si eandē partē easdemue partes primi acceperit, esse reliqui quincuplū. Statuamus secundū 1 N † 1. pars seu partes eius sit 1. Primus ergo erit 3 N — 1, ut si partē partesúe secūdi, hoc est unitatē acceperit, sit reliqui triplū, quippe 3 N triplū est residui 1 N. Volumus etiā secundū, si primi eandē partē, partesúe easdē assumserit, residui esse quincuplū. Sed quoniā duo hi numeri iuncti faciunt 4 N, & secūdus aliquid accipit, primusq; id dat, & summa residui sit quincupla, & iuncta cū residuo summa fit 4 N: residuū utiq; erit pars de 4 N ea, quæ aliquota sit & Numeros numeret: hoc est, 2 N. Ergo si à 3 N — 1 tollamus 1 N, habebimus primi partē uel partes. si aūt tollamus * *, fiunt 7 N — 1. Nā secūdus si à primo accipiat 7 N — 1, fit quincuplū eius quod relinquitur primo. Superest heic ut quæramus an quæ pars uel partes sunt 1 N † 1, eadē sit de 3 N — 1, hoc 7 N — 1. Cùm autē tale aliquid quæris, 7 N — 1 & 1 N † 1 æqualia sunt quod fit ex unitate in 3 N — 1. hoc est, partes alternatim multiplicantur. Fiunt 7 N & 4 — 1 æquales 3 N — 1. & fit 1 N, 5. Iam ad positiones, erit primus 15, & secundus 12. Erant autem partes secundi, 1. uideamus an etiam 1 secundi. erunt 7. & multiplico per 7 duos numeros, erit primus 8, secūdus 12. partes 7. Et quia primus nō habet $\frac{7}{12}$, multiplico per 3, ne in unitatem excidamus. Erit primus 24, secundus 37, partes $\frac{1}{7}$, & demonstratio manifesta.

XYLANDRI.

*In eadem cum priore naui est hæc propositio. quin ζ pro ς heic scripta sint, non dubito. Si $\frac{1}{6}$ de 24 auferas, idq; 36 adijcias, habebis 20 & 40, summa residui duplam. Contrà si $\frac{1}{6}$ de 36 ablatum ad 24 adijcias, summa & residuum æquabuntur, utrunque 30. Hæc ergo ita sunt affecta, ut planè Delio opus heic sit natatore. Si de 3 N — 1 primo, coneris auferre 7 N — 1, idq; addere secūdo: insanias profectò, ne dum summam residui quincuplam facias. Quæritur ergo, posito primum esse 3 N — 1, secundum 1 N † 1, quid auferri primo, addi secundo possit, ita ut summa residui sit quincuplū. Primæ positionis ratio est euidens. Secūdā sic indagemus. Summa positorū numerorū est 4 N. hāc oportet sescuplā esse eius quod relinquetur primo, si secūdū suo detrimēto auxerit. Hoc perspicuū est cōsiderāti quorūcūq; numerorū naturā. si enim duo numeri sint alter alterius multiplex, summa ad minorē multiplex erit, numero rationis unitate aucto puta 3 & 15 sunt quincupli summa 18 ad 3 sescupla. 18 ad 2 nonecupla, 20 summa ad 2, decupla, &c. Relinquetur ergo primo $\frac{2}{3}$ N, & dabit secūdo $2\frac{1}{3}$ N — 1. atq; is eo pacto fiet $\frac{10}{3}$ N, planissimè ad residuū primi quincuplus. Itaq; postulatis satisfactum erat, si constaret tantam partem 1 esse de 1 N † 1,*

*quanta*

*quanta est $2\frac{1}{3}$ N—1 de 3 N—1. Obscurum non est, hos quatuor numeros esse proportionales; quādo affirmamus eandē utrobiq; totius partē siue portionē ablatā fuisse. Duc ergo 1 in 3 N—1, & 1 N † 1 in $2\frac{1}{3}$ N—1, fient producti æquales $2\frac{1}{3}$ Q † $1\frac{1}{3}$ N—1 atq; 3 N—1. addito q; & detis qua par est, 7 Q æquantur 5 N. Est ergo 1 N, $\frac{5}{7}$. Hypostasib. hoc aptemus, fit primus $\frac{15}{7}$—1, hoc est $\frac{8}{7}$. secūdus $\frac{12}{7}$. Atq; hi planissimè satisfaciunt omnib. postulatis. Primo adijce unitatem, ademtam secundo, fit summa $\frac{15}{7}$, tripla residui $\frac{5}{7}$. Quanta autem pars secundi fuit unitas, tanta etiam pars primi, ademta ipsi, secundo est addenda. Id regula proportionum demonstrabit quale sit. $\frac{12}{7}$ dant 1, quid $\frac{8}{7}$. ostenditur $\frac{2}{3}$ tantam esse partem primi, quanta unitas est secundi. & si $\frac{2}{3}$ in $\frac{12}{7}$, 1 in $\frac{8}{7}$ ducas, idem producitur. Primus multatus $\frac{2}{3}$, retinet $\frac{10}{21}$. $\frac{2}{3}$ ad secundum si addas, $\frac{50}{21}$ conficies, quincuplum summæ. Habet & artificiosam & verā quæsiti demonstrationem: & qua iacturam Diophantea sarcire utcunq; possit. Autoris verba longè sunt corruptiora, quàm ut coniecturis emendari integrarive possint, qui ex libro meliore restituet, ei à nobis agentur gratiæ. De variè mutandis & positionibus & solutione, non est necesse monere.*

XXXVII. Inueniantur duo numeri infiniti, ut qui ex uno in alterum ducto fit, cum ipsorum summa conficiat numerum præscriptum. Is esto 8. Sit primus 1 N, secundus 3. productus ipsorum multiplicatione cum summa ipsorum, est 4 N † 3. hoc æquatur 8. Fit 1 N, $\frac{5}{4}$. Ad posita, erit primus $\frac{5}{4}$, secundus 3. Consideremus nunc unde 1 N sit factus $\frac{5}{4}$. nimirum quia 5 diuidebamus per 4 N. Ipse 5 est id quo datus numerus secundum excedit. & 4 N unitate secundum excedunt. Ergo quantumcunque statuamus secundū, & à dato numero (ut heic ab 8.) auferamus, residuo per numerum diuiso, qui excedat secundum unitate, existet primus. Sit secundus, uerbi gratia 1 N—1. aufer hoc de 8, restant 9—1 N. hoc diuide per secundum unitate auctū, pu-
a $\frac{9-1N}{1N}$ ta per 1 N, habebis primum [a]. Atque sic in infinitate soluta est quæstio. & unius in alterum multiplicatione productus cum summa ipsorum 8 faciet. Infinitum hoc dicitur, quia quotcunq; unitates pro 1 N usurpes, semper positiones hę resolutæ, quęstionis postulatis satisfacient.

XYLANDRI.

*Paucula quædā menda sustulimus. Infinitas solutiones admittit quæstio, cùm pro secundo (uel primo etiā) ponere liceat quiduis. Sit primus 1 N, secundus 2. fiet etiā primus 2. Sit primus 1 N, secundus 7, fit primus $\frac{1}{8}$, &c. Sit in proposito exemplo infinitatis: ubi quidē nos primū nō 9 N—*
a $\frac{9-1N}{1N}$ *1, quod falsum est, sed [a] posuimus) 1 N, erit secūdus 1, primus $\frac{7}{2}$. productus $\frac{7}{2}$ summa ipsorum $\frac{9}{2}$. summa horum 8, &c. 1 N 5. ergo secundus 4, primus $\frac{4}{5}$. productus $\frac{16}{5}$. summa ipsorū $\frac{24}{5}$. summa horū $\frac{40}{5}$, id est 8, &c. Cætera uide ad sequentem propositionem.*

XXXIIX. Inueniantur tres numeri, ita ut quem bini faciunt planum, is cum eorum summa cōiunctus, faciat datum numerum. Numeros autem datos necesse est quadratos esse unumquemlibet, si ei unitas adijciatur. Primi & secundi summa est plano ex ipsis orto fit 8. secundi & tertij 15. tertij & primi 24. Quoniam uolo qui fit ex primo in secundum, cum eum summa ipsorum fieri 8, ponatur secundus quotcunq; unitatum, detrahaturq; ab 8, diuiso residuo per numerum unitate secundo maiorem, prodeatur primus. Sit secundus 1 N—1, erit primus 9 N—1. Rursum quia qui fit ex secundo in tertium cum summa eorum facit 15, ab his aufero 1 N—1, & diuido per unitate maiorem secūdo, hoc est per 1 N: fit tertius 16 N—1. Hic in primū ductus quem producit, ei si accedat summa ipsorum, fit 144 Q—1. hoc ęquatur 24. fit 1 N, 12. ad positiones hoc applicemus, erit primus 33 secundus 7. tertius 68. omnia multiplicentur per denominatorem, fit primus 165, secundus 84, tertius 240.

XYLANDRI.

*Ponamus ut placuit Diophanti exscriptori primum 9 N—1, secundum 1 N—1, tertiū 16 N—1. Multiplicemus primū in secundum, fit 1 Q † 1—10 N, adde ipsos numeros, fit summa 9 Q—1, quæ æqualis fit 8. Ergo 9 Q sunt 9, & 1 N est 1. Ergo primus fit 8, secundus nihil, quod est oppidò absurdum. At secundo in tertium ducto, fit addita eorum summa 16 Q—1 æquale 15. & rursum 1 N, fit 1. Ergo rursum secūdus est nihil. uides quàm hæc sint absurda. Porro primus in tertium 9 N—1 in 16 N—1 faciunt 144 Q † 1—25 N. summa ipsorū 25 N—2 illis addecta, fit 144 Q—1 æqualis 24. siue 144 Q æquantur 25. Ergo 1 Q est $\frac{25}{144}$. ergo 1 N est $\frac{5}{12}$. Resoluantur iam positiones. 9 N—1, est $\frac{45}{12}$ minus $\frac{12}{12}$, hoc est $\frac{33}{12}$, primus. secundus 5 N—1 est $\frac{5}{12}$*

*minus*

*minus $\frac{11}{12}$. quod cum fieri non possit, illud ab hoc deduxit autor, ut sint $\frac{7}{12}$. nulla huius licentia commonstrata causa. tertius est $\frac{80}{12}$ —— $\frac{12}{12}$, 16 N —— 1, scilicet $\frac{68}{12}$. Quod additur de communi denominatore, prauum est. nam 33 in 165 quinquies, 7 in 84 duodecies inest. Itaq; necesse est aliquid hinc excidisse. Nam hi numeri quæstioni planè non satisfaciunt. $\frac{21}{12}$ in $\frac{7}{12}$ multiplica, habes $\frac{231}{144}$. adde $\frac{40}{12}$, seu $\frac{480}{144}$, summa $\frac{711}{144}$ nihil minus quàm 8. Sed & quod datos numeros uult unitate singulos à quadrato abesse, quam causam habeat non explicatur: cur ita sit necesse, facile apparet ex æquatione 144 Q —— 1 & 24. Nam cùm unitatem adijci oporteat ad 24, nisi hoc pacto fieret quadratus, explicari in ueris numeris æquatio non potuisset: puta si 144 Q — 1 æquarentur cum 30, aut 9, aut 12, &c. quia radix quadrata ex 31, 10, 13, &c. haberi non potest. Causa autem falsitatis omnis in eo est, quod (ut & in superiore propositione fecerat) 9 —— 1 N per 1 N diuidere cum debeamus, pro uero quotiēte, qui est [a], falsum posuit 9 N —— 1 librarius,* a $\frac{9 - 1N}{1N}$
*& reliqua confudit omnia Nam si 1 sit ualor Numeri, sanè quia hæc nihil diuidit, [b] erit 8. Est* b $\frac{9 - 1N}{1N}$
*autem 8 etiam 9 N —— 1. Verùm hoc ipsum absurdum est absurdius quouis alio absurdo, tantum ponere primum numerum, quantum fieri debeat amborum summa ad productum ex ipsis adiecta: & secundo dare nihil. Ponamus denuò primum ex superiore propositione [c], secundum 1* c $\frac{9 - 1N}{1N}$
*N —— 1. pro tertio sequamur canonem, auferamus secundum à 15, & reliquum per 1 N diuidamus, fiet tertius [d]. Primo in tertiũ ducto, producitur [e]. huic si addas summam ipsorum [f], con-* d $\frac{16 - 1N}{1N}$
*ficies [g]. atq; hæc summa æquabitur 24. & facta (ut solemus appellare) reductione 144 —— 1 Q* e $\frac{144 + 1Q - 25}{1Q}$
*æquatur 24 Q, hoc est, 144 || 25 Q. Atq; heic quoq; apparet, cur dati numeri, unitate singuli* f $\frac{25N - 2Q}{1Q}$
*debeāt quadrato aliquo esse inferiores, ut paulo antè in uitiosa æquatione etiam licuit uidere. Fit ergo 1 N, $\frac{12}{5}$. Restat ut demonstremus, hoc pacto solui quæstionem, & omnibus eius postulatis* g $\frac{144 - 1Q}{1Q}$
*satisfieri. Resoluamus hypostases 9 —— 1 N, est $\frac{45}{5}$ —— $\frac{12}{5}$, hoc est $\frac{33}{5}$ quod diuidi per $\frac{12}{5}$ (nempe per 1 N) oportet. fit $\frac{11}{4}$. tantus est primus. secundum $\frac{7}{5}$ esse, tertium uerò $\frac{17}{3}$, eadem secutus comperies. Diophantus hos tres numeros redegerat ad eandem denominationem, sexagesimarum scilicet partium, ut essent $\frac{165 - 84 - 340}{60}$. quod artificium alibi tradidimus. neq; uerò fuit necessarium. Si A in B multiplices, $\frac{77}{20}$ emergent. atqui A est $\frac{55}{20}$, B $\frac{28}{20}$. Summa omnium $\frac{160}{20}$. nimirum 8. Si B in C, habebis $\frac{119}{15}$. sed B est $\frac{21}{15}$, C $\frac{85}{15}$. summa omnium $\frac{225}{15}$, hoc est 15. C in A ducto gignes $\frac{187}{12}$. iam C est $\frac{68}{12}$, & A est $\frac{33}{12}$. summa omnium $\frac{288}{12}$, uidelicet 24. Iucundior est hæc, quàm laboriosior, operatio. Alioqui licebat duobus primis ut collibuisset per præcedentem positis, puto $\frac{1}{5}$ & 7, &c. tertium inuenire, & satisfacere quæstioni. Sed nos etiam Diophanti emēdationem subtili exposita propositi pertractatione uolumus ostendere.*

XXXIX. Inueniantur duo numeri infinitè, ut qui ex uno in alterum fit, summa ipsorum multatus, datum numerum exhibeat. Hic esto 8. Statuamus primum 1 N, secundum 3. Qui fit ex altero in alterum, dempra ipsorũ summa, est 2 N —— 3, quod æquatur 8. Fit 1 N, $5\frac{1}{2}$. Ergo secundum positiones, primus est $5\frac{1}{2}$, secundus 3. Rursum dispicio unde factum sit quod 1 N est $5\frac{1}{2}$. nimirum quia 11 diuidebatur per 2. Atqui 11 est summa dati & secundi numerorum. 2 autem N sunt unitate minor numerus secundo. Itaque si statuero secundum quantumcunque, eumq; dato adijciam, & summam diuidam per unitate minorem secundo, inuenero primum. Sit secundus 1 N † 1. adde ad 8, fiunt 1 N † 9. diuide per unitate minorem secundo, scilicet per 1 N. fit 1 † 9 N. itaq; infinitè soluta est quæstio. Hæc propositio, lemma est sequenti inseruiens.

XL. Dentur tres numeri, ut qui producitur binis altero in alterum multiplicatis, demta eorum summa sit qui poscitur numerus. Oportet datos seu postulatos numeros, quemq; unitate minorem quadrato esse. Planus è primo in secundum detracta summa ipsorum sit 8. secundi in tertij itidem horum summa multatus, 15. tertij in primum summa horum amissa 24. Heic iuxta lemma iam expositum, si secundum statuo 1 N † 1, addo hoc ad 8, fiunt 1 N † 9. diuido hoc per unitate minorem secundo, hoc est per 1 N, nascitur primus 1 † 9 N. Sed & tertius hoc modo inuenietur 1 † 16 N. duobus itaque postulatis satisfecimus. Denique primus in tertium ductus quem producit, demta eorum summa facit 144 Q —— 1, æquale hoc 24. & fit 1 N, $\frac{12}{5}$. ad positiones hoc si conferas, erit primus 17, secundus 17, tertius 92. quos si uelis idem habere nomen, omnia per 60 multiplicabis, erit primus 285, secundus 204, tertius 460.

XYLANDRI.

*In fine est ἄλλως, Aliter. Sed aliunde hoc, & otiosè inculcatum, cùm problema sequens nihil tale tractet. eodem autem quo superiora uitio laborant hæc problemata. Non enim 1 † 9 N fit, sit N † 9 per 1 N diuidatur, sed* [a]*. quomodo prius problema horum soluitur in infinito. Esto enim ualor Numeri 4. ac ponamus secundum 1 N † 1. is erit 5. primus sit 1 † 9 N, erit 37. producunt hi 185, unde si 42 (summam ipsorum) auferas, 143 restant, cùm 8 postulentur. At si primus statuatur* [b]*, is hoc pacto erit* $\frac{13}{4}$*. quod si per 5 (secundum) multiplices, emergent* $\frac{65}{4}$*. summa amborum est* $\frac{33}{4}$*, qua à producto sublata,* $\frac{32}{4}$ *relinquit, hoc est 8. Restat ut ueram posterioris solutionem exponamus. Sit ergo secundus 1 N † 1, erit primus (ut antè)* [c]*, & tertius iuxta canonem non 1 † 16 N, sed* [d]*. Hoc ubi per primum multiplicaueris,* [e] *producetur. cui si adimas* [f] *(hæc enim est summa primi & tertij) relinquetur nimirum* [g] *æquale 24, rursumq́; 1 N est* $\frac{12}{5}$*. Ergo primus est* $\frac{19}{4}$*, secundus* $\frac{17}{5}$*, tertius* $\frac{23}{3}$*. (si uoles ad unum reducere, erunt communi denominatore 60 constituto, hi numeratores 285, 204, 460. qui soli numeri integri incorrupti apud Diophantum supererant.) Experiamur autem an satisfiat postulatis. Primo in secundum ducto fiunt* $\frac{323}{20}$*. summam ipsorum* $\frac{163}{20}$ *inde aufer, restant* $\frac{160}{20}$*, hoc est 8. Secundus in tertium producit* $\frac{391}{15}$*. summa ipsorum* $\frac{166}{15}$*. inde subtracta, relinquuntur* $\frac{225}{15}$*, hoc est 15. Deniq; tertius in primum gignit* $\frac{437}{12}$*, unde si abijciam ipsorum summam* $\frac{149}{12}$*, supersunt* $\frac{288}{12}$*, hoc est 24. Variari poterant hæc multis modis, etiam loco 8, 15, 24. alijs adscitis numeris, 35, 48, 63, 80, 99, &c. modò unitate adiecta quadrati qui fierent, quibuscunq;. ne in surdos res excidat.*

(Margin: a $\frac{1N + 9}{1N}$; b $\frac{1N + 9}{1N}$; c $\frac{1N + 9}{1N}$; d $\frac{1N + 16}{1N}$; e $\frac{1Q + 25 N + 144}{1Q}$; f $\frac{2Q + 25 N}{1Q}$; g $\frac{144 - 1Q}{1Q}$)

XLI. Duo numeri infinitè dentur, ut qui fit uno ipsorum in alterum ducto, ad summam ipsorum habeat proportionem quæ præscribitur. Sit producti ad summam tripla ratio. Statuo primum 1 N, secundum 5. Planus ex ipsis fit 5 N, quod triplum sit ad 1 N † 5. ergo 3 N † 15 æquantur 5 N. fit 1 N, $7\frac{1}{2}$. quod si positionibus nostris accommodemus, primus erit $7\frac{1}{2}$, secundus 5. Considero heic, 1 N fieri $7\frac{1}{2}$, quia 15 per 2 N diuiduntur. At 15 sunt secundus per datæ rationis numerum multiplicatus, & 2 sunt interuallum secundi, & numeri rationis. Ergo si quantumcunq; statuamus secundum, & multiplicemus eum per numerum rationis datæ, ac productum diuidamus per interuallum, quo secundus rationis numerum excedit, inuenietur primus. Secundus sit 1 N, multiplica per 3, fiunt 3 N. diuide per 1 N — 3, habes primum $\frac{3N}{1N - 3}$.

XYLANDRI.

*In Græco mutilata sunt hæc. Porrò si $7\frac{1}{2}$ & 5 addas, habes $12\frac{1}{2}$. quorum triplum $37\frac{1}{2}$. tantundem fit ex 5 in $7\frac{1}{2}$. Variari posse hoc, non est obscurum. Sed adhibenda est cautio. Sit primus 1 N, secundus (uerbi gratia) 12. summa 1 N † 12. huius triplum 3 N † 36 æquabitur 12 N, quod fit uno in alterum ducto. fit primus 4, secundus 12. Nam quater 12 sunt 48, cuius tripla est ratio ad summam amborum, 16. Statuamus porrò primum 1 N, secũdum 2. & ratio maneat eadem. Producitur 2 N, quod sit triplum ad 1 N † 2. ergo 3 N † 6 æquabuntur 2 N, & 1 N † 6 erit nihil, quod est absurdum. Hoc moneo, ut intelligas secundum maiorem rectè poni eo numero quo ratio producti ad summam futura exprimitur.*

XLII. Dentur tres numeri, ut quem bini producunt planum, is ad eorum summam ea sit quæ poscitur ratione. Sit productus è primo in secundum ad summam ipsorum triplus: è secundo in tertium ad summam horum quadruplus: è tertio in primum ad summam eorum quincuplus. Statuatur secundus 1 N, erit ex præcedente lemmate primus [a]. Eodemq́; modo tertius [b]. Restat ut primus in tertium ductus quem producit, is ad summam ipsorum sit quincuplus. Producitur autem [c]. Summa autem horum est [d]. Huius summæ ergo quincuplum [e] æquatur [f]. Et abiecto communi denominatore, 12 Q æquantur 35 Q —— 120 N. ita fit 1 N, 120. Id nunc ad positiones applicemus, quæ erant [g], 1 N [h]. Si 120, ut 1 N, in primam multiplices, in 3 N, erunt 360, reliquum est ut 120 ducas in 1 N —— 4, fiunt 51. relinquitur ergo primus 361. Secundus 120. non enim ab aliqua numeri parte denominabatur. Pro tertio 120 in 4 N ducatur, fiunt 480. item in denominatorem 1 N —— 4, fiunt 20. restat ergo tertius 480. & manifesta est demonstratio.

(Margin: a $\frac{3N}{1N - 3}$; b $\frac{4N}{1N - 4}$; c $\frac{12Q}{1Q + 12 - 7N}$; d $\frac{7Q - 24N}{1Q + 12 - 7N}$; e $\frac{35Q - 120N}{1Q + 12 - 7N}$; f $\frac{12Q}{1Q + 12 - 7N}$; g $\frac{3N}{1N - 3}$; h $\frac{4N}{1N - 4}$)

XYLANDRI.

*Monstrosè omnia sunt deprauata. Itaque ab æquationis initio ad uerbum omnia descripsi Latinè.*

*Latinè. superiora de meis uerbis corrigas licet. Rationem addendi* [a] *& [b] alibi nos explicauimus, quâ heic Diophātus persequitur. Ibi nos diximus* Abiecto communi denominatore, *in Græco est* καὶ πάντα ἐπὶ τὸ κοινὸν μόριον μ ε ε. *legendum autem est* αὐτῶν μόριον. *nam abiectio denominatoris eiusdem, nihil aliud est quàm occulta multiplicatio per eum ipsum, qua numeratores absoluuntur. Cætera omnia sunt falsa. Non enim 120, sed* $\frac{120}{23}$ *fieri N, sat est euidens. Et hi numeri, 360, 120, 480, quiduis potius præstabunt quàm postulatis problematis huius ut respondeant. Cæterùm ut rem expediamus, cum 1 N sit* $\frac{120}{23}$, *3 N erunt* $\frac{360}{23}$, *& 1 N —— 3 erunt* $\frac{120}{23}$ *demptis* $\frac{69}{23}$, *hoc est* $\frac{51}{23}$, *per hoc si diuidas* $\frac{360}{23}$, *inuenietur primus numerus* $\frac{360}{51}$. *Secundus manet* $\frac{120}{23}$. *tertius est 4 N,* $\frac{480}{23}$, *diuidendus per 1 N —— 4, hoc est per* $\frac{120}{23}$ —— $\frac{92}{23}$, *scilicet per* $\frac{28}{23}$, *fit ergo tertius* $\frac{480}{28}$ *siue* $\frac{120}{7}$. *Hinc facilè est uidere quo pacto Græca corrigenda sint. Sed experiamur Marte nostro, an etiam postulatis satisfiat. Primo* $\frac{360}{51}$ *in secundum* $\frac{120}{23}$ *ducto, producitur* $\frac{43200}{1173}$. *Summa ipsorum* $\frac{14400}{1173}$, *triens producti. Rursum secundus* $\frac{120}{23}$ *in tertium* $\frac{120}{7}$, *gignit* $\frac{14400}{161}$. *at summa ipsorum est* $\frac{3600}{161}$, *quadrans producti. Denique tertius* $\frac{120}{7}$ *in primum* $\frac{360}{51}$ *gignit* $\frac{43200}{357}$, *at summa ipsorū est* $\frac{8640}{357}$, *quæ per quinque multiplicata, producto æquat.*



XLIII. Dentur tres numeri, quorum quem bini faciunt planum is ad summam omniū habeat quæ poscitur rationem. Sit planus à primo in secūdum ad omnium summam triplus: planus è secundo & tertio ad omniū summam quadruplus: planus tertij in primum ductu factus, ad omnium summam quincuplus. Quando binorum planus semper ad summam omniū habet datam rationem: quæro primum tres numeros, & aliquem utcunque adscitū, ad quem binorū plani habeāt imperatas rationes. Arbitrarius iste numerus sit 5. cuius triplū, hoc est 15 N cùm sit planus qui fit ex primo in secūdum, erit planus iste 15. Statuamus secundum 1, erit primus 15 N. Rursus cùm qui ex secundo in tertium fit, sit quadruplū arbitrarij istius, erit planus 20 N. ergo cùm secūdus sit 1, erit tertius 20 N. Restat ut qui è tertij ductu in primum fit, nimirum 300 Q. sit quintuplus ad arbitrarium. Ergo 300 Q æquantur 25. Sanè si numerorum inter se exstitisset ratio ea, quæ quadrati est ad quadratum, quæstionis solutionem inueneramus. Enimuerò 300 Q orti sunt ex 15 N in 20 N multiplicatis: cùm quidem 15 ad arbitrarium 5 triplam, 20 ad eundem quadruplam haberet rationem. Hoc ergo desideratur, ut si triplus ad 5 per quadruplū ad 5 multiplicetur, productus ad 5 per 5 multiplicatis productū rationem habeat, quæ est quadrati ad quadratum. Atqui 5 numerus arbitrarius est, & temerè adscitus. Quærendus proinde est numerus, cuius triplus & quadruplus quem planum procreant, is ad numeri ipsius quincuplū, rationem habeat quæ est quadrati ad quadratum. Hunc statuamus 1 N. Eius triplus 3 N in quadruplū 4 N multiplicatus, producit 12 Q. atque hic ad positi quincuplū, ad 5 N inquam, rationem habeat oportet quæ est duorū quadratorum inter se. Consequens est ut altero in alterū ducto, fiat quadratus. Ergo 60 C æquantur quadrato. is sit 900 Q. fit 1 N, 15. Ergo ad posita, cùm quæsitus numerus sit 15, primus & secundus producent 45 N. cumque secūdus sit 1 N, erit primus 45 N. eadēque ratione tertius 60 N. Superest ut productus hoc in primum multiplicato, scilicet 2700 Q. æquetur quintuplo positi numeri, quod est 75. Fit 1 N hoc pacto 6. Itaque secundum posita primus erit $7\frac{1}{2}$, secundus 6, tertius 10. Quorum summa si foret 15, satisfactum planè esset quæstioni. Statuo itaque eorum summam 15 Q. atqui ea est $23\frac{1}{2}$ N. hoc ergo æquatur 15 Q. fit 1 N 47. Ad posita. erit primus 308. secundus $282\frac{1}{2}$, tertius 470.

XYLANDRI.

*Heic quoque mendas complures correximus, re ipsa freti. Docet autem ratio, si 60 C aliquot quadratis æquentur, & 1 N fieri debeat 15 (quod constat Diophantum uoluisse) non referri ad* μ̄, 40 *Q, sed ad* ω̄ α, 900 *Q. Nam 900 per 60 diuiso, 15 prodeunt. Cætera omnino sunt confusa. Itaque reliqui ut erant in Græco. Meam autem operationem proponam. Certè in primis hypostasibus inconstanter arbitrarius ille summam omnium repræsentans 5 N, eius triplum 15 N, quadruplum 20 N, ac quincuplum denique 25 unitates dicuntur. & si hoc 25 N ponas, 300 Q æquabuntur cum 25 N, & 1 N fit* $\frac{1}{12}$, *quod minimè placuit Diophanto. Eadem inconstantia est in hypostasibus posterioribus. ubi summa omnium ponitur iam 75 unitates, mox ad solutionem inueniēdam unitatibus signum Q adhibetur. Solutionis autem numeri palàm sunt falsi & inepti*

 *ut demon-*

*ut demonstrare etiam hoc pigeat. Sic itaque ratiocinationem instituamus: Inueniemus numerum, cuius triplus & quadruplus inter se multiplicati, producãt numerum cuius ad dati quincuplum ratio sit quæ est quadrati ad quadratum. Hoc loco utcunq; tolerari potest Diophantea lectio, & sit quæsitus numerus 15. Atq; hunc nos statuamus summam omnium esse. Iam cum primo in secundum ducto fiant 45. ponamus secundum esse 1 N, fiet primus [a], & eadem ratione tertius [b]. primo in tertium ducto producemus [c], quod æquetur 75, quincuplo summæ omnium. Hac reducta æquatio fit — 270 || 75 Q. & 1 Q fit 36. Ergo 1 N, puta secundus, est 6. primus $7\frac{1}{2}$, tertius 10. quæ positiones manserant integræ inter tot corruptelas. Atqui horum numerorum summa non est, quod ponebatur, 15, uerum $23\frac{1}{2}$. Hoc loco obseruandum est summã omnium non temerè poni 15 Q. Nam character N additur nouis positionibus, ad uerum ualorem Numeri inueniendum, quo soluatur quæstio. Erunt ergo nunc hypostases hæ $7\frac{1}{2}$ N, 6 N, 10 N. quarum summa $23\frac{1}{2}$ N. At primus in secundum ductus, 45 Q producit, cuius triens 15 Q ex hypothesi summam omnium æquat. fit ergo 1 N, $\frac{47}{30}$. Ergo primus, $7\frac{1}{2}$ N, est [d]. secundus (puta 6 N) $\frac{282}{30}$, tertius $\frac{470}{30}$, nimirum 10 N. Præstat autem in sexagesimis sic exponi, $\frac{705}{60}$ $\frac{564}{60}$ $\frac{940}{60}$. Summa omnium est $\frac{2209}{60}$. Primus in secundum si artificiosè multiplicetur ($\frac{705}{60}$ in $\frac{564}{60}$. 705 & 60 per 15, 60 & 564 per 4 diuisos ad minores terminos reduco, fiunt $\frac{47}{15}$ in $\frac{141}{4}$.) producuntur $\frac{6627}{60}$, omnino triplum summæ omnium. Si secundum in tertium ducas ($\frac{564}{60}$ in $\frac{940}{60}$. numeratorem prioris & denominatorem posterioris per 6, reliquos per 10 diuisos ad minimos redegi, fiunt $\frac{94}{6}$ in $\frac{94}{10}$.) producitur $\frac{8836}{60}$, omnino summæ omnium quadruplus. Deniq; primo & tertio commissis, $\frac{705}{60}$ in $\frac{940}{60}$, hoc est (quo in prima multiplicatione, eodem heic utor compendio) $\frac{47}{15}$ in $\frac{235}{4}$ multiplicato, fiunt $\frac{11045}{60}$, ac tantundem fit prorsus, si summam omnium quintuplices. Habes explicationem quæstionis neq; inelegantis, & perdifficilis: ita autem corruptè ac mutilatè ad nos perlata, ut pænè animum initio despondeerim. Vides autem quid possit legitima minutiarum tractatio in his rebus.*

a $\frac{45}{1 N}$
b $\frac{60}{1 N}$
c $\frac{2700}{1 Q}$
d $\frac{352\frac{1}{2}}{30}$

XLIV. Inueniantur tres numeri, ut summa eorum multiplicata per primum, fiat triangulus; in secundum, quadratus; in tertiũ, cubus. Statuatur summa triũ 1 Q. Primus quadratorũ numero triangulo, puta 6 Q. secundus quadratorum numero quadrato, 4 Q. tertius quadratorũ numero cubico, sit 8 Q. Ergo 1 Q in primum ducta facit 6, triangulũ. in secundũ, 4, quadratũ. in tertiũ, 8, qui est cubus. restat ut hi tres coniũcti sint 1 Q. at sunt 18 Q quod æquatur 1 Q. & multiplicatis omnibus per 1 Q, fit æquatio inter 18 & 1 QQ. Oportebat ergo 18 esse 1 Q, & habere latus quod sit quadratus. At is est summa trianguli, quadrati, & cubi. Proinde reperiẽdus est quadratus, cuius latus cõstet ex partib. numeris triangulo, quadrato, cubo. Esto is 1 QQ — 2 Q. Ergo si ab 1 QQ aufero 1 Q † 1 — 2 Q, supersunt 2 Q — 1. hæc diuidãtur in cubũ & triangulũ. ac sit cubus 8. erit triãgulus 2 Q — 9. Porrò quiuis triãgulus p octo multiplicatus, adscita unitate quadratus fit. Ergo 16 Q — 71 æquantur quadrato. Fingo quadratũ à latere 4 N — 1. is est 16 Q † 1 — 8 N. Fit 1 N, 9. Hoc si ad positiones accõmodetur, erit triangulus 56, quadratus 470, cubus 8. Venio ad id quod initio proposueram. Statuo summam eorum 1 Q. primum 153 Q, quando triangulus requiritur. secũdum 470 Q, quia quadratus, tertium 8 Q, quia cubus. In hos multiplicetur 1 Q, numerus quadratus: faciet triangulum, quadratum, cubum. Horum summa sit 1 Q. at est 2561 Q, quod æquatur 1 Q. & depresso utroq; per 1 Q. æquatur 1 Q & 2561. Fit 1 N 9. Ergo secundũ posita, primus est 153, secundus 6400, tertius 8. & euidẽs est demonstratio.

XYLANDRI.

*Obscurior an corruptior sit hoc loco Diophantus, quæri potest. Vix adeò uestigia restant, quæ secutus posse uidearis indagare quid hoc sit rei, quod heic agitur. Trianguli numeri sunt, qui numeris aliquot (quotcunq; sint, perinde est) ab unitate ordine naturali progredientibus (scilicet sequente antecedentem unitate identidem superante, qui est modus & ratio numerandi) in unam summam contractis. ut 3, 6 10, 120, 3828. & infiniti alij: sic dicti, quod unitatibus ita distributis ac collocatis, ut appinximus, quãdam triquetri æquilateri habent similitudinẽ: non quod area sit eadẽ, sed quod similis utcũq; figura. Est ergo trigonus summa pgreßionis Arithmeticæ ab unitate inchoata & cõtinua numerorũ serie quousq; libuerit propagata. Tædebat adscribere canonẽ, quo pacto talis series numerorũ in unã summã cõtrahatur. sed tamẽ inferius oportebit eũ proferre. Ipsorũ aũt trigonorũ pgreßio & ppagatio qualis sit, ex hoc typo licet intelligas.*

De triangulis numeris non uulgaris.

Series

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Series numerorum.* | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. |
| | | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / |
| *Trigoni.* ——— | 1. | 3. | 6. | 10. | 15. | 21. | 28. | 36. | 45. | 55. | 66. | 78. | 91. | 105. | 120. | 136. | 153, &c. |

*Primus statuitur 1. adde 2. habes 3, secundum. huic 3, habes 6 tertium. huic quartum numerum seriei naturalis addes, & sic deinceps augebuntur trigoni. Sed & alia elegantior ratio est eos inueniendi, multiplicando impares naturali serie expositos, per binos numeros ordine numerandi sibi succedentes. ita*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Impares.* | 3. | 5. | 7. | 9. | 11. | 13. | 15. | 17, &c. |
| *Multiplicantur per* | 1 & 2. | 2 & 3. | 3 & 4. | 4 & 5. | 5 & 6. | 6 & 7. | 7 & 8. | 8 & 9. |
| *Fiunt trigoni* | 3. 6. | 10. 15. | 21. 28. | 36. 45. | 55. 66. | 78. 91. | 105, 120. | 136. 153. |

*Hoc loco rationem nullam fractorum aut surdorum haberi; sed de ueris numeris agi & absolutis, notum est. Quod si quæratur numero aliquo proposito, sit ne (uerbi gratia is quem suprà posuimus) 3828 trigonus; & si sit, quotus in ordine & cuius progreßionis numerorum ab unitate naturali serie proficiscentium summa: eius quæstionis solutionem Diophantus obliquè perstrinxit. Omnis, inquit, trigonus per octo multiplicatus, accedente unitate fit quadratus. Ergo 100, 20, 11, &c. trigoni non sunt: quia 801, 161, 89. quadrati non sunt. At si 3828 per 8 multiplices, & unitatem producto addas, 30625 conficitur, quadratus numerus. Est ergo 3828 trigonus. Vt scias quotus sit, & è qua serie numerorum coagmentatus (radicem uocant hoc trianguli) latus quadrati sic facti unitate mulsa, reliqui semißis ostendet ultimum progreßionis numerum: primus est 1. Verbi gratia, radix quadrata de 30625 est 175. aufer 1, restant 174. cuius semißis 87. Est ergo 3828 trigonus in ordine (unitate pro primo, ut solet, numerata) octogesimus septimus: ac conflatur 1 & 87, omnibusq; in medio numeris in unam summam collectis. Nam 1 & 87 sunt 88. cuius semißis (ut canon poscit) in 87 multiplicatus, summam uniuersorum 3828 gignit. Sic 5050 per 8 multiplicatus, adiecta producto unitate fit 40401. quadratus, cuius radix 201. ergo semißis de 200, id est 100, est radix trigoni 5050, hoc est, is est centesimus, fitq; collectis omnibus ab 1 ad 100 (his simul inclusis) numeris. Huius trigonorum proprietatis meminit etiam Plutarchus noster in quarta Platonica quæstione. quam nos* Plutarchi locus illustratus. *ex Algebra demonstrare hoc loco satis habebimus. Cuiuis trigono æquatur* $\frac{1}{2}$ *Q †* $\frac{1}{2}$ *N. Nam si canonis dicti ignaro mihi imperaretur, ut trigoni 703 radicem exponerem, (quod uniuersè de quouis trigono intelligendum liquet.) 1 N ego pro ultimo progreßionis numero ponerem: sed & numerus terminorum progreßionis Arithmeticæ, qualem definiuimus, in unã summam contracta, quam datus exprimit trigonus, erit 1 N. primus autem terminus in hoc negocio semper est unitas. Ergo canonem progreßionis Arithmeticæ in unam summam colligẽdæ sequor. addo primum ultimo, hoc est 1 ad 1 N. fit 1 N † 1. hoc per semissem numeri terminorum, uel hunc totum per semissem summæ primi & ultimi (idem enim esse constat) multiplicato: producitur* $\frac{1}{2}$ *Q †* $\frac{1}{2}$ *N. Hoc ergo æquatur uniuersè cuiuis trigono numero; hoc est, summæ cuiusuis progreßionis numerorum naturali serie continuata ab unitate: & heic æquatur cum 703. Supereſt, ut uideamus quantus sit, id est quot unitatibus æstimetur 1 N. Heic tiro (his enim laboramus) animaduertat bis quatuor esse octo: & numerum per 2, mox productum per 4 multiplicare, esse illum numerum octuplicare. Nam cum* $\frac{1}{2}$ *Q †* $\frac{1}{2}$ *N æquentur 703: utrinque detracto* $\frac{1}{2}$ *N, erit æquatio inter* $\frac{1}{2}$ *Q & 703 ——* $\frac{1}{2}$ *N. Ergo si per 2 omnia multiplicentur, 1 Q æquabitur 1406 —— 1 N. (uides trigonum per 2 esse multiplicatum?) Iam secundum canonem ut æquatio explicetur, semißis unitatis N notatæ, hoc est* $\frac{1}{2}$ *in se multiplicatur. fit* $\frac{1}{4}$. *addendus est 1406, (duplum trigoni.) quod ut fiat, per 4 multiplicatur (ita fit octies 703) subscripta sibi, fit scilicet* $\frac{5624}{4}$. *& addito* $\frac{1}{4}$, *colliguntur* $\frac{5625}{4}$. *(Heic uides qui unitas ad octuplum trigoni addatur.) Summa radix quadrata est* $\frac{75}{2}$. *sed* $\frac{1}{2}$ *canon auferri iubet. ita 1 N fit* $\frac{74}{2}$, *siue 37. Ergo 37 est radix dati trianguli 703, hoc est trigesimus septimus trigonus est 703, & summa est numerorum 1, 2, 3, & 37. serie naturali progredientium. Vides ut sapientes ex Algebra pulcerrimos canones extruxerint? Nosq; eadem opera & Plutarchi locum illustrauimus (quod idem, DEO uolente etiam aliàs suis locis nostrarum lucubrationum faciemus) & Diophanteo lemmati lucem attulimus. Sed & canonem de Arithmetica progreßione obiter auximus: quem alio loco collocupletauimus. Sub cultro me relinquis, diceres? neq; problemati interim satis fit? Certè modestus Lector ueniam nobis debet, sineque*

*ocium nobis omnia rimandi suppeditat, & difficultati molestiæq́; etiam quandoque succumbimus. Experiamur tamen, quid contra has difficultates φιλοπονία pertinax possit, instigata elegantijs rei proposita. Primò omnium illud ὕστερον πρότερον non ἀμηχάνως modò, sed & ἀριθμητικῶς iuuat. est enim analyticum. Quo modo numeri proponuntur soluturi quæstionem. nunquam ei satisfiet. Summa omnium est 6561. (nam mendas persequi non uacat) qui cùm sit quadratus non semel in 6400 ductus, quadratum utiq; (ut suprà monuimus) dabit. Sed fieri non potest, ut per 8 multiplicatus, cubum producat. cum neque cubi sint ambo, neq; cuborum naturam communicantes siue cuborum similes. de trigono ipse, si uidebitur, experieris. Quid si numeros proponas $\frac{153}{6561}$ $\frac{6400}{6561}$ $\frac{8}{6561}$? ne sic quidem satisfiet postulatis. Summa enim erit $\frac{6561}{6561}$ hoc est 1. & cùm 1 nihil uariet sui multiplicatione in alium, cæterùm 153 sit (quod per canonem experiri licet, aut etiam in typo uidere) triangulus, 6400 haud obscurè quadratus, 8 cubus: demto medio, nullus satisfaciet quæstioni. nam $\frac{153}{6561}$ trigonus esse non potest, cùm non sit numerus propriè. & $\frac{8}{6561}$ cubicam radicem non habet. Hæc ergo ita sunt affecta. Græca quidem facilius fuerit de integro scribere, quàm corrigere. Valdè heic multa sunt, quæ explicari aut defendi posse non uidentur. Quis enim concedat triangulum per quadratum si multiplicetur, statim manere triangulum? Certè 6 triangulus est, 24, 54, 96 trianguli non sunt, facti quadratis in triangulũ multiplicatis. Porrò quadratus cubum si multiplicet, nisi ipse quoque cubus simul fuerit, cubum nullo modo producet. nisi fortè 32 cubus est, 4 in 8, quadrato in cubum multiplicato ortus; ut & 576 fit ex quadrato 9 in cubum 64, & 432 ex 16 in 27: neuter cubus. atq; hoc etiam elementa Algebrica docent. Quis uerò nescit, aliud esse numerum per 1, quàm per 1 Q multiplicare. Ergo si ponantur numeri isti 6 Q, 4 Q, 8 Q, producetur summa eorũ 1 Q posita, & in singulos ducta, 6 QQ, 4 QQ, & 8 QQ quorum summam fateor quidem esse 18 QQ: sed ut concedam primum esse triangulum, & ultimum cubum esse (nam quin quadrato in quadratũ ducto quadratus nascatur, dubium minimè est) quis me coget credere, aut quis patiar etiã mihi hoc persuaderi? Adde quòd hoc pacto noua conditio terminus statuitur, adeoq́; noua quæstio proponitur. Oportebit enim de tribus qui quæruntur primũ esse sesquiplũ summæ, sesquiplum secundi, dodrantem tertij, secundum quadruplum summæ, bessem primi, semissem tertij, tertium secũdi duplum, primi sesquitertiũ, octuplũ summæ. quæ omnia multis modis sunt absurda, nisi hoc fortasse prætexatur, 1 Q non ubiq; idẽ ualere: quòd alienissimũ est in res Arithmeticas admittere. Vides nõ heic dũtaxat impingi, quòd 18 quadratus non est? His omnibus sic medebimur, ut ponamus summam quæsitorum esse 1 Q, cum qui sit primo in eam ducto, 6, puta*
a $\frac{6}{1Q}$ *triangulum. erit ergo primus* [a]. *eademq́; de causa secundus* [b], *tertius* [c]. *hi enim singulatim per 1*
*Q multiplicati, producent 6. 4. 8. triangulũ, quadratũ, cubũ. & si summa ipsorũ esset 1 Q planissimè*
b $\frac{4}{1Q}$ *satisfecissemus quæstioni. at summa ipsorũ est* [d], *æqualis scilicet 1 Q. & sic reductiõe fa-*
c $\frac{8}{1Q}$ *cta, 1 QQ æquabitur 18. Hoc est quod in Græco dicitur, ἐν πᾶσιν ὅτι δυναμοδύναμιν μίαν. Si 18 esset Quadratoquadratus, satisfieri quæstioni tam nũc posset. cùm non sit, alius quærẽdus est, cõpositus (ut*
d $\frac{18}{1Q}$ *erat 18) iunctis triãgulo, quadrato, & cubo. Diophantus heic admodũ ingeniosa est usus fictione, quã cõsectatus uestigia indagani. Quadratoquadratũ ponit 1 QQ. qui cũ sit ex quadrato, cubo, triãguloq́; cõflatus; cùm cõstet 1 QQ — 2 Q + 1 esse quadratũ (lateris 1 Q — 1. sicut 1 Q — 2 N + 1 est quadratus lateris 1 N — 1) hunc ab illo aufert. relinquitur 2 Q — 1. (& notũ est 2 per 8 multiplicato fieri 16, quadratũ, ad quod respexit autor, alioqui aliũ quadratũ licuisset subtrahere, ut 1 QQ — 6 Q + 9, &c.) Residuũ porro cõstat ex cubo & triãgulo. sit cubus quicũq; absolutus numerus: 8 more suo sumsit Dioph. & nos cũ sequemur Is de residuo sublatus 2 Q — 9 relinquit. atq; hæc est portio triãgulo debita. Et sit QQ — 2 Q + 1, 8, ac 2 Q — 9 addas, omnino cõficies 1 QQ. Iã theorema illud de triãguli ꝓprietate à nobis è Dioph. ac Plutar. allatũ explicatũq́;, ad æquationẽ perueniẽdi uiã nobis aperit. Multiplicabimus 2 Q — 9 per 8, & ꝓducto unitatẽ adijciemus, fiet 16 Q — 71, quadratus nimirũ. Cui effingitur quadratus à latere 4 N — 1, ut 16 Q utrinque aboleantur, & æquatio fit inter N & unitates. & fit 1 N. 9. ergo 1 QQ. est 6561. Videamus*
e $\frac{153}{1Q}$ *nũc reliqua. 1 QQ — 2 Q + 1 est 6400. aufer ab 1 QQ. supersunt 161. de his 8, relinquũtur 153, quẽ esse trigonũ cõstat. ergo 1 QQ 6561, cõponitur ex trigono 153, cubo 8, & quadrato 6400. Hæc*
f $\frac{6400}{1Q}$ *ad superiora nũc accommodemus. Sit summa omniũ 1 Q, primus* [e], *secũdus* [f], *tertius* [g]. *Hi sin-*
g $\frac{8}{1Q}$ *gulatim per 1 Q multiplicati producent 153. 6400. 8. triãgulum scilicet, quadratum & cubum. Summa omnium* [h] *æqualis 1 Q, & reducta æquatione 6561 æqualis 1 QQ. Ergo 1 Q est 81.*
h $\frac{6561}{1Q}$ *Proinde primus est $\frac{153}{81}$, secundus $\frac{6400}{81}$, tertius $\frac{8}{81}$. summa omnium $\frac{6561}{81}$, hoc est 81. uidelicet 1 Q. producti multiplicatione singulorũ in summã sunt ijdẽ liberati denominatore, ut ratio & experientia*

*experientia dictat. Itaq; hanc quoq; nos propositionē suæ integritati restitutam damus: ut, si libeat, Græca omnia facere possis, ac pro mēdis uera reponere. Variari solutio innumeris modis potest, alijs triangulis, quadratis, cubis, pro arbitrio ad positiones adscitis.*

XLV. Quæruntur tres numeri, ita ut excessus maioris supra medium ad excessum medij supra minimum sint qua præcipitur ratione. Portò autem bini quadratū faciant coniuncti. Sit ratio interualli maiorum ad interuallum minorum tripla. Iam cum summa medij & minimi sit quadratus, esto 4. ergo medius erit maior binario. sit itaque 1 N † 2. erit minimus 2 —— 1 N. Et cum interuallum maioris & medij ad interuallum medij & minimi sit triplum: hoc autem sit 2 N: erit illud 6 N. Ergo maximus est 7 N † 2. Supersunt duo postulata, nimirum ut primus & medio, & seorsim minimo addito, fiat quadratus. Heic mihi duplicata occurrit æquatio, cùm & 8 N † 4 quadrato, & item quadrato 6 N † 4 æquentur. & quia unitatum numerus est quadratus, expedita est æquatio. Statuo enim duos numeros, quorum uno in alterum ducto producantur 2 N: quam legem esse duplicis æquationis nouimus. Sint $\frac{1}{2}$ N & 4. Fit 1 N, 112. At ubi me ad posita confero, non possum auferre 112 (1 N) à 2. Volo itaque 1 N inueniri minorem binario: atque sic etiam 16 minus erit quàm 6 N † 4. Nam binario in 6 multiplicato, & 4 addito, fiunt 16. Quando igitur quæro 8 N † 4 æquales quadrato, itemq; 6 N † 4 æquales quadrato: sed & à binario fit quadratus 4: ita iam tres sunt quadrati, puta 8 N † 4, 6 N † 4, & 4. & interuallum inter maximum & medium, interualli inter medium & minimum est triens. Itaq; eò res redijt, ut inueniendus sit quadratus, ut interuallum maioris & medij, triens sit eius quo medius minimum superat: ac præterea minimus sit 4, medius minor quàm 16. Statuatur minimus 4. latus medij 1 N † 2, erit ipse 1 Q † 4 N † 4. Cum ergo interuallum inter maiores, interualli inter minores sit triens: hoc autem sit 1 Q † 4 N, erit interuallum maximi & medij $\frac{1}{3}$ Q † $\frac{4}{3}$ N. adde hoc medio, habebis maximū 1$\frac{1}{3}$ Q † 5$\frac{1}{3}$ N † 4, quod æquetur quadrato. Multiplica totum per 9. fient 12 Q † 48 N † 36 æqualia quadrato. sed & quadrans horum, 3 Q † 12 N † 9 æquatur quadrato. Præterea constitutum erat ut medius quadratus minor esset quàm 16. ergo etiā latus eius minus oportebit esse quàm sit 4. est autem latus illud 1 N † 2: ut utrinq; binario abiecto, 1 N oporteat minorem esse quàm est 2. Superest ut 3 Q † 12 N † 9 æquem quadrato. Effingo quadratum à latere quod sit 3 —— aliquot N. Fit autem N ex aliquo numero sexies sumto, & adsciscente demum sibi 12, qui fuit æquationis numerus, ac diuiso in interuallum quo Numeri quadratus abest à Quadratorum numero, scilicet 3, qui sunt in æquatione. Eò itaque deducta est res, ut inueniendus sit numerus, qui sexies sumtus, adiecto 12, ac diuisus in interuallū quo quadratus ipsius ternario præstat, quotientem binario minorem exhibeat. Sit is 1 N. is per 6 multiplicatus, itaq; 12 auctus, fit 6 N † 12. ipsius autē quadratus detractis 3, habet 1 Q —— 3. Volo igitur 6 N † 12 diuidi per 1 Q —— 3, ut quotiens fiat binario minor. Sed & secundus diuisus per 1, duplum quotientis facit. ergo 6 N † 12 ad 1 Q —— 3 rationem habent minorem quàm sit 2 ad 1. ergo etiam planus qui fit ex 1 in 6 N † 12 minor est quàm qui ex 2 in 1 Q —— 3, hoc est quàm 2 Q —— 6. Adijciantur 6 quæ desunt utrinq;, fiunt 6 N † 18 æquales 2 Q. In æquatione hac explicanda, dimidium numeri charactere N insigniti in se ducitur, fiunt 9. & numerus Q insignitus in absolutos ducitur, fiunt 36. quibus adde 9, habes 45, cuius latus minus est quàm 7. adde semissem N, non minus quàm 5 habebis. ita fit, ut 3 Q † 12 N † 9 æquentur quadrato lateris 3 —— 5 N. Fit 1 N, 42, hoc est 21. Posui autem medij quadrati latus 1 N † 2: erit quadrati latus 43, ipse quadratus 1849. Venio ad primum propositum, & statuo quadratum 1849 æquales 6 N † 4. omnia in 121, fit 1 N 1765. Estq; minor binario. Iā ad posita initio quæstionis. Statueramus medium 1 N † 2, minimū 2 —— 1 N, maximū 7 N † 2. Erit maximus 11007, medius 2817, minimus 887. & quando denominator est 726, nō est quadratus, sextans autem eius est 121 quadratus. Rursum itaq; omniū sextantes accipiantur, fiet primus 1834$\frac{1}{2}$, secundus 469$\frac{1}{2}$. tertius 14$\frac{1}{2}$. Quodsi in integris hæc habere desideras, ne semissis intercurrat, omnia per quatuor multiplica. Erit primus 7338, secundus 1878. tertius 58. & manifesta est demonstratio.

XYLANDRI.

*Non Platonicis obſcuriora ſunt hæc monſtra numeris, ſed folijs Sibyllæ confuſiora. Primæ hypotheſes ſatis habent commodè. Ad duplicatam quod attinet æquationem, 1 N fit 112 (malè ιβ pro ριβ legitur) omnino. Nam ſi addas $\frac{1}{2}$ N & 4, quorum multiplicatione 2 N componuntur, fit $\frac{1}{2}$ N † 4, cuius ſemiſsis $\frac{1}{4}$ N † 4 in ſe ductus, $\frac{1}{4}$ Q † 1 N † 4 producit, æquale 8 N † 4. utrinque 4 abijciuntur & 1 N, fit æquatio inter $\frac{1}{16}$ Q & 7 N. ergo 1 N eſt 112, & $\frac{1}{2}$ N ac 4 ideò ſumebantur, ut utrinq; abijci 4 poſſent. quod non contingeret ſi $\frac{1}{2}$ & 4 N ſumſiſſet. At tertius ponebatur 2 —— 1 N, quod hac ratione eſſet 2 —— 112, quod eſt abſurdum. In poſitione poſteriori inuertitur problematis conditio. Et cum interuallum maiorum ad interuallum minorum triplũ fuerit, heic contrà fit minorum differentia tripla ad differentiam maiorum. Quod ſcripſi,* medius minor quàm 16, *id ſequentia demonſtrant ita debere eſſe. & alioqui cùm 16 ſit quadratus, quid attinet ei latus fingere, ut heic fingitur 1 N † 2? Quod $1\frac{1}{3}$ Q † $5\frac{1}{3}$ N † 4 per 9 multiplicauit, id eſt non ſine cauſa factum: quia ſcilicet 9 eſt quadratus, per quem deberent ad integros numeros reduci. quo etiã conſilio per 4 diuiſit, ut quadratus δύναμις maneret. Sed quæ ſequũtur,* Fit autem 1 N ex aliquo numero, *&c. libenter fateor me nõ intelligere. neq; uolui operam ludere in ijs obſcuritatibus perluſtrandis, quam alibi rectiùs ponere licebat. Cur ſtatus quæſtionis mutetur, utcunq; apparet, nempe ut inueniatur ualor Numeri minor binario, per quem primæ hypotheſes reſoluantur. Quæſtio eſt de latere ponendo, cuius quadratus æquetur 3 Q † 12 N † 9. Cur pars eius lateris ſit 3, facilè apparet: ſcilicet ut 9 utrinq; abijci poſſint. ſed & —— N eſſe debent, ut in quadrato & Q affirmari, & N negari, itaq; iniri poſſit comparatio. Ponamus latus 3 —— 4 N. quadratus 9 † 16 Q —— 24 N æquabitur 3 Q † 12 N † 9. abijce utrinq; 9 ac 3 Q, & adijce utrobiq; 24 N, fient 13 Q æquales 36 N, & 1 N $2\frac{10}{13}$ maior binario Si latus ſtatuiſſes 3 —— 3 N, 1 N inueniſſes etiã grãdiorẽ, ſcilicet 5. quod experiaris licet. Si aũt latus ſtatuas 3 —— uel 5, uel 6, uel 10, &c. N, ſemper ualor radicis fiet minor quàm 2. Quod cùm ipſa multiplicationũ & inter æquationes comparationũ tractatione nullo negocio ſentire poſſis, equidem non uideo quorſum labyrintho iſti peruagando debeamus nos macerare: maximè cum res in ſurdam æquationem excidat, inter 2 Q & inter 6 N † 18, hoc eſt 1 Q & 3 N † 9, quã ille ſuo more abſoluens, cum 2 Q ſint, neceſſe habuit 18 per 2 multiplicare. Fit autem 1 N propriè √ 45 † 2. pro quo 5 ſuo arbitratu ſumſit autor, cum potuerit 6, 7, &c. accipere. Videamus nũc reliqua. Lateris 3 —— 5 N quadratus eſt 9 † 25 Q —— 30 N, æqualis 3 Q † 12 N † 9. deme utrinq; 3 Q † 9, & adde 30 N, fiet æquatio inter 42 N & 22 Q. & 1 N fit $\frac{42}{22}$, hoc eſt $\frac{21}{11}$, paulo minus binario. Ergo 1 N † 2 eſt $\frac{43}{11}$. Eius ergo quadratum $\frac{1849}{121}$ æquabimus 6 N † 4, ut minori parti duplicatæ æquationis. fit 1 N, $\frac{1365}{726}$, minor aliquantulum binario. Iam ad primas poſitiones hoc accommodemus. eaſq; per iam inuentum Numeri ualorem reſoluamus. fiunt maximus $\frac{11007}{726}$ medius $\frac{2817}{726}$. minimus $\frac{87}{726}$. Hi ergo ſunt qui deſiderabantur numeri, & ſatisfaciunt poſtulatis. Idq; experiamur. Aufer medium à maiore, ſuperſunt $\frac{8190}{726}$. aufer à medio minimum, reſtant $\frac{2730}{726}$. Eſt aũt illud reſiduum huius triplum. Adde primum ſecundo, habebis ſummam $\frac{13824}{726}$, hoc eſt (nam 6 communis eſt menſura, cũ numerator & denominator ſimiles ſint quadratorum: quod ſi non perſpicis, experiendo cognoſces) $\frac{2304}{121}$, quadratum lateris $\frac{48}{11}$. Adde primum tertio, habebis ſummam $\frac{11094}{726}$. hoc eſt (eandem ob cauſam) $\frac{1849}{121}$, quadratum lateris $\frac{43}{11}$. Adde medium tertio, habebis $\frac{2904}{726}$, hoc eſt $\frac{484}{121}$, ſiue 4, utiq; quadratum. Præter alia hoc etiã obſeruare in hac tractatione poſſis, noſtram quàm Græcorum tractationem minutiarum multo eſſe expeditiorem. Numerorum uitia dedita opera reliqui. De appendice tamen Diophantea ob Græcum minutiarum morem, rudiores hoc à nobis auctarij accipiant. Senario is & numeratores omnes diuidit, & communem denominatorem 726, qui hoc pacto quadratus fit. & ita exponuntur.* [a] *Iam ſi unus numerus multos multiplicet, non mutari proportionem eſt notum. Ergo ad ſemiſſes illos numeratorũ amoliendos, ut denominator quadratus interim maneat, omnia per 4 (quadratum minimum) multiplicat. ita numeri quæſiti fiunt $\frac{7338 \quad 1878 \quad 58}{484}$, noſtrorũ beſſes. eos ſatisfacere poſtulatis certum eſt: itaq; eſſe calculus te docebit. Heic quoq; improbus labor me expediuit: & perrupimus ea, quæ pœne inacceſſa uidebantur primo obtutu.*

[a] $\frac{1834\frac{1}{2} \quad 469\frac{1}{2} \quad 14\frac{1}{2}}{121}$

XLVI. Inueniantur tres numeri, ut exceſſus qui eſt quadrati à maximo orti ſupra quadratum medij, ad exceſſum medij ſupra minimum ratione ſit quæ præſcribitur. Bini autem ſumti, quadratum faciant. Exceſſus porrò quadrati à medio ſupra quadratum minimi, ſit ad exceſſum medij ſupra minimum triplus. Quando maximus

&

& medius quadratum faciunt, faciant 16 Q. eritq; maximus maior quàm 8 Q. sit ergo maximus 8 Q † 2. Et quando maximus ac medius coniuncti superant summam medij & minimi hi ergo iuncti minus sunt quàm 16 Q, amplius interim quàm 8 Q. Sint ergo hi simul 9 Q. Ergo cùm maximus & medius iuncti sint 16 Q, maximus autem 8 Q † 2, medius est 8 Q —— 2, ac proinde tertius 1 Q —— 2. Et quando uolo excessum, quo quadratus maximi quadratum minimi superat, esse triplum excessus medij supra minimum: ille autem est 64 Q, hic 7 Q: uolo 64 Q esse triplum ad 7 Q. at hoc triplicatum facit 21 Q. at 64 Q ex trigesies bis duabus unitatibus orti sunt. Incumbit ergo mihi, ut numerum aliquem inueniam qui per 32 multiplicatus faciat 21. is est 21. Pono ergo primum 8 Q † 21 medium 8 Q —— 21. tertium 1 Q —— 21. Estq; impletum unum postulatorum. summam scilicet medii & minimi esse quadratum. Sunt autem medius & minimus 9 Q —— 41, æquales quadrato; cuius latus sit 3 N —— 6. & fit 1 N, 597. Ad positiones, erit primus 306, tertius ergo 1376. Secundus autem 263544. tertius 138681.

## XYLANDRI.

*Quid uis amplius? Pœnè defatigatus incidi in hanc propositionem. cuius solutio quàm eleganter ad nos peruenerit exscripta, facilè uides. Vt omnia sint faciliora intellectu, hypothises sic exponamus.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Summa 9 Q* | *A 8 Q + 2* | *Summa 16 Q.* | *Hoc modo satisfactũ est duobus postulatis: cùm primi ac secundi summa sit quadrata, itemq; primi & tertij.* |
| | *B 8 Q — 2* | | |
| | *C 1 Q — 2* | | |

*Medius minimum quo superat, id est 7 Q. Quadratus maximi est 64 Q Q † 32 Q † 4. Quadratus medij est 64 Q Q —— 32 Q † 4. Horum interuallum est 64 Q. Atqui debuit esse 21 Q. Heic dignus uindice nodus incidit: sed noster codex eloqiua Diophantea ad nos non pertulit. Dispiciamus originem incommodi, ut medeamur: siquidem possimus. Numerus hic 64 Q. qua ratione fuit productus, eadem si producamus 21 Q, rem confecerimus. Proinde loco binarij alius quærendus est, cuius quadruplum in 16 ductum, 21 procreet. Nam 64 Q interualli inuentio hoc docet, 2 bis in 8 (mitto signa prudens) multiplicatum fuisse ad quadratorum utriusq; inuentionem, & in subtractione minoris quadrati de maiore, æquale productum fuisse adiectum. Sicut ergo octies octo, 64 fecerunt: ita quæremus numerum, qui per 8 multiplicatus, 21 faciat. cuius quadrans (itidem ut 2, quadrans de octonario) additus & detractus 8 Quadratis absolutè, primi & secundi hypothesin exhibeat. Compendio hoc dixit Diophantus, intelligiq; uoluit, loco binarij alium quærendum, qui per 32 multiplicatus, 21 producat. Ego causam commonstrare uolui. Inuentio est pœnè puerilis: fit enim $\frac{21}{32}$. Ergo primus ponetur 8 Q † $\frac{21}{32}$ secundus 8 Q —— $\frac{21}{32}$. summa, ut antè, 16 Q. Secundum de 9 Q aufer, habes reliquum tertium. Vitiata sunt hoc loco Diophanti uerba, ut & initio. Nam non secundus & tertius, uerùm hic & primus, sua summa 9 Q conficiunt. Est ergo tertius 1 Q —— $\frac{21}{32}$. & superatur à medio quantitate 7 Q. Quadratum maximi est 64 Q Q † $\frac{441}{1024}$ † $\frac{21}{2}$ Q. Medij autem 64 Q Q † $\frac{441}{1024}$ —— $\frac{21}{2}$ Q. horum interuallum planè est 21 Q, triplum eius quo summa primi & secundi, summam primi & tertij excedit. quod erat interuallum 7 Q. Nihil ergo ad perfectam solutionem nobis deest, quàm quod summa secundi & tertij an quadrata sit, nondum liquet. Ea autem est 9 Q —— $\frac{41}{32}$. Heic demum mea utar libertate, & tibi indagandos numeros Diophanteos, corrigendosq; (si harum rerum satagis) relinquam. ipse de meo soluam quæstionem. 9 Q —— $\frac{21}{16}$ (minutiam enim minimis terminis expressi) æquantur quadrato. Poteram hic per 4. 9. aut alium quadratum multiplicare, maximè per 16. sic enim 144 Q —— 21 æquarentur quadrato. uerùm id tu, si placet sequere. Ponamus latus quadrati, cui 9 Q —— $\frac{21}{16}$ æquari debeat, esse 3 N —— $\frac{1}{4}$ fiet 1 N, $\frac{25}{24}$. Breuitatis caussa operationes omitto. Heic si circumspectus sit, (quod hæc negocia unicè requirunt) confestim animaduertes te peccasse. Nam cùm 1 N unitate sit minor, quadratus quoq; eius unitatem nõ æquabit; nedum ut superet. (Hac hypothesi quàm sit uera, nemo nõ statim uidet in numerorũ tractatiõe uersatus.) Qui ergo $\frac{21}{16}$ ab hoc quadrato subducemus, quod flagitat hypostasis? Iam ut ualor Numeri unitatẽ superet, facilè mediocri attentione consequemur. Nam de 3 N quidem dubitari nõ potest, quin ad mutuò abolenda in æquatione 9 Q sola hæc positio sit apta: sed & hoc manifestum est, quicquid ei unitatũ adijcie-*

*adijciemus, negatiuo debere signo — copulari. alioquin absurdum quod erat cōsecuturum, ultrò se ostendit. Quanto magis auxeris numerum unitatū per — à 3 N subtrahendarū, ut latus fingendi quadrati cōsequare: tanto maiorē fore 1 N unitate; uel ratiocinando perspicies, uel experiēdo uidebis. ut nouis et perplexis hypothesib. planè sit supernacaneū uti. Semper quidē diuisor erit duplum eius quod fit unitatibus in numerum N adscripto ductis. diuidetur aūt quadratus harū ipsarū unitatū, adscitis* $\frac{21}{16}$*. nam ipse ciphrarū ductus hoc subministrat. Ergo nisi quadratus qui fit unitatib. signo — ad 3 N annexis in se multiplicatis, excedat aliquanto duplum eius quod fit ijs unitatibus in 3 (qui est N numerus) nihil efficietur. Proinde statuamus latus 3 N — 6. erit quadratus 9 Q † 36 — 36 N, aequale 9 Q —* $\frac{21}{16}$*. Ergo 37* $\frac{5}{16}$ *aequantur 36 N. (Habes Diophanteos numeros, nobis ratione certa in minimis uersantibus oblatos. & in his acquiescemus, alioqui statuerā 3 N — 8 ponere pro quadrati latere. Sed scilicet mos gerendus est Diophanti exscriptori.) Ergo 1 N, est* $\frac{597}{576}$*. & 1 Q est* $\frac{356409}{331776}$*. sed & * $\frac{5}{16}$ *sunt sub eodē denominatore sunt* $\frac{103680}{331776}$*. Est ergo primus, si hypostases dextrè resoluas,* $\frac{293052}{331776}$*. secundus* $\frac{227592}{331776}$*. tertius* $\frac{252729}{331776}$*. Horum quadratos, & reliqua nolui adscribere, ne patrocinium ueterni suscepisse industrijs existimari possem. magna mihi molestia fuit, rem eruere explorareq́ in numeris. Discipulorum hae sunt partes, scrutari singula, & periculum sua diligentia facere in examinandis singulis. neq́ ego hic compendia Logistices trado. Confirmare autē hoc possum, numeros satisfacere postulatis, quos nos perhibuimus. rediguntur aūt per communem mensuram ad minores eiusdem nominis. sed tu uideris.*

# DIOPHANTI RERVM ARITHMETICARVM LIBER QVINTVS.

1 DEntur tres numeri proportionalitatis geometricae, ita ut quiuis eorū multatus certo uno aliquo numero fiat quadratus. sitq́ iste numerus 12. Est aūt geometrica proportionalitas, quando numerus qui fit extremorum altero in alterum multiplicato, quadratus est medij. Quaero numerum quadratum qui 12 detractis fiat quadratus, quod facilè fit, & est 42 $\frac{1}{4}$. pono alterum extremorum Q. ergo medius erit 6 $\frac{1}{2}$ N. Restat ut horū uterq; demtis 12 sit quadratus. Quadrato utaque aequatur cùm 1 Q — 12, tum 6 $\frac{1}{2}$ N — 12. Horum interuallum 1 Q — 6 $\frac{1}{2}$ N. id metitur 1 N, mensura 1 N — 6 $\frac{1}{2}$. quorum interualli semissis in se si ducatur, fit 169, quod aequatur minori, siue 6 $\frac{1}{2}$ N — 12. fit 1 N, 361. Ergo positiones si ad huc exigantur, erit primus 42 $\frac{1}{4}$. secundus seu medius 346 $\frac{1}{5}$ 144. tertius 13321.

## XYLANDRI.

*Deiphobum apud inferos Aeneas nō tam difficulter agnouit, atq́ ego sensum & formam pulcerrimi huius problematis: adeò est lacerum. Explicemus ergo. In progressionis seu proportionis (proportionalitatem uocamus ἀναλογίαν, cùm λόγον proportionē usurpamus) geometrica descriptione pro πλέον ἔχῃ τον μο, legendum est, πλευρὰν ἔχῃ τὸν μέσον. Res nota est uel ex 20. septimi Euclidis. Quaeruntur ergo tres numeri continuè proportionales, quorū quisq́ 12 abiectis sit quadratus. Ipsum opus docet, quadratos eos fore antequam multentur duodenario: utiq́ extremos. Sed uerba haec ζητῶ τέτραγον τῆς λείψεως μο ῑβ, mutila sunt, & quadratum requiri, cui si auferātur 12, maneat quadratus, res ipsa docet. nisi enim quadratus esset, multiplicati per 1 Q radix haberi quadrata nequiret, ut ex annotatis à Campano & nobis ad 2 noni Euclidis patet. & sequens problema simile huius; disertè quadrati meminit. Quomodo ergo is quadratus inueniatur, undecima secundi noster docuit Diophantus. Posuit autē 1 N & 1 N † 1. ita quadratorum differentia 2 N † 1 aequatur 12. fit 1 N, 5* $\frac{1}{2}$*. ergo alter 6* $\frac{1}{2}$*. quadratum huius, ut materis, & detractionis 12 patiens non mutata natura, 42* $\frac{1}{4}$*. Is ergo est maximus. minimus 1 Q per eum multiplicatus, fit 42* $\frac{1}{4}$ *Q, cuius latus 6* $\frac{1}{2}$ *N. Reliqua per duplicatā cōficiuntur aequationē, de qua alibi praeceptū satis. Metientē et mensurā uocat duos numeros, quorū multiplicatione cōponitur 1 Q — 6* $\frac{1}{2}$ *N, internallū dupla aequationis. ij sunt 1 N, & 1 N — 6* $\frac{1}{2}$*. quorū differentia 6* $\frac{1}{2}$*. eius semissis 3* $\frac{1}{4}$*, huius quadratus* $\frac{169}{16}$*, qd minori, hoc est 6* $\frac{1}{2}$ *N — 12 aequatur. Fit aūt 1 N quātitas sic nota. 12 utrinq́ adde, habebis 6* $\frac{1}{2}$ *N aequales* $\frac{361}{16}$ *(quia 12 sunt* $\frac{192}{16}$*) facta diuisiōe, fit* $\frac{361}{104}$*, tantus ergo est 1 N. Cùm ergo posuerimus primū siue maximū 42* $\frac{1}{4}$*, secūdus 6* $\frac{1}{2}$ *N, erit* $\frac{13}{2}$ *in* $\frac{361}{104}$ *multiplicatis pductus, scilicet* $\frac{361}{16}$*, hic est medius. Minimus est 1 Q. ergo* $\frac{361}{104}$ *in se ductus, facit quadratū* $\frac{130321}{10816}$*. is est tertius seu minimus. Primū an sint cōtinuè pportionales hi numeri, exploremus.*

*Multipli-*

*Multiplicetur $\frac{169}{4}$ primus, in $\frac{130321}{10816}$ tertium. Compendio heic uteris, siquidem obseruaueris 169 & 10816 communem habere mensuram, quod in ipso opere animaduerti potuit uam $42\frac{1}{4}$ seu $\frac{169}{4}$ ita ortus est, ut sit quadratus 13 lateris, numerus 169. sed 10816 quadratus est lateris 104, quod 13 in 8 multiplicatis fiebat. diuide 10816 per 169, inuenies 64 pracise. Ergo 169 est cõmunis mensura numerorum 169 & 10816, pro quib. (per 2 & 17 VII Euclid.) ponemus 1 & 64. & multiplicabimus $\frac{1}{4}$ in $\frac{130321}{64}$ fient $\frac{130321}{256}$. tantundem fieri, si medius, nimirum $\frac{361}{16}$, in se ducãtur: hoc est radicẽ quadratã hũc esse illius, liquet. Sunt ergo $42\frac{1}{4}$. $\frac{361}{16}$. & $\frac{130321}{10816}$. tres numeri cõtinenter proportionales, quòd in minùs exercitatorum gratiam demonstrandum duxi. Porrò 12 aufer à primo, superest $30\frac{1}{4}$, quadratus lateris $\frac{11}{2}$. Aufer 12 ($\frac{192}{16}$) à secũdo, supersunt $\frac{169}{16}$, quadratus lateris $\frac{13}{4}$. Aufer 12 (uidelicet $\frac{129792}{10816}$) à tertio, relinquitur $\frac{529}{10816}$ quadratus lateris $\frac{23}{104}$. Vides etiam huic postulato satisfactum planissimè. Si in opere per XI secundi posuissem 1 N & 1 N † 2, quadratum inuenissemus 16. quo posito pro altero extremorũ, res in aqualitatẽ fuisset deducta, numeriq́; facti 16. 16. 16. Si 1 N & 1 N † 3. quadratus fuisset $12\frac{1}{4}$, &c. Nam persequi omnia non habeo necesse, satis est indicasse.*

11 Dentur tres numeri continuè proportionales, quorũ quiuis detracto numero qui præscribitur, fiat quadratus. sitq́; præscriptus numerus 20. Quæro quadratũ, qui adiectis 20 fiat quadratus. is est 16. Hunc pro altero extremorũ pono, pro ultimo 1 Q. ergo medius est 4 N. Ergo, ut in præcedente propositione, restat ut tam 4 N † 20 quàm 1 Q † 20 æquentur quadrato. Horum interuallum est 1 Q —— 4. quem cõponunt 1 N & 1 N —— 4 sua multiplicatione. quorum interualli semissis in se multiplicatus, facit 4, quod æquetur 4 N † 20, minori quadratorum. Est autẽ hoc absurdũ, cùm oportuerit 4 non esse minus quàm 20. Est autem 4 quadrans numeri 16. Porrò 16 numerus est non casu & temerè oblatus: sed quadratus est, qui adsumtis 20 faciat alium quadratum. Quærendus ergo est quadratus, qui cùm quadrantem habeat, maiorem quàm est 20, tum adscitis 20 fiat quadratus. Vtiq; quadratus hic erit maior quam 80. Est autem 81 quadratus, maior octogenario. Ergo si latus quadrati quem quærimus, statuamus 1 N † 9, erit quadratus 1 Q † 18 N † 81. Is cùm 20, quadratus esse debuit. Ergo 1 Q † 18 N † 101 æquantur quadrato. Ponamus eius latus 1 N —— 11, fiet quadratus eius 1 Q † 121 —— 22 N æqualis 1 Q † 18 N † 101. fit 1 N, $\frac{1}{2}$: ergo cùm quæsiti quadrati latus fuerit 1 N † 9, erit quadratus eius $90\frac{1}{4}$. Recurro nunc ad id quod initio erat positum, & extremorum alterum statuo $90\frac{1}{4}$: tertium 1 Q. erit medius $9\frac{1}{2}$ N. Iam eò uentum est, ut quæram quo pacto & $9\frac{1}{2}$ N † 20, & 1 Q † 20 æquentur quadrato singula. Interuallum est 1 Q —— $9\frac{1}{2}$ N. quod metitur 1 N, mensura 1 N —— $9\frac{1}{2}$. Interualli huiusce semissis in se ductus, facit 361, quod æquatur minori, scilicet $9\frac{1}{2}$ N † 20. Fit 1 N, 41. ergo secundum posita erit primus $90\frac{1}{4}$, secũdus $389\frac{1}{2}$, tertius 1681.

## XYLANDRI.

*Vltima hac liquidò sunt falsa. In superioribus quadam mendosa sunt, quorum emendatio ex uersione nostra peti potest. pro μέρος δ' καὶ μεῖζον, lege μέρ⊗ τέταρτον ὁ μεῖζον. Nam cùm positione numeri 16 (qui quadratus, etiam 20 auctus quadratus manet) in absurdum incidisset, quod 4 (quadrans eius) cum 4 N † 20 aquabatur: sensit loco 16 alium quadratum ponendum, qui 20 adiectis quadratus itidem fieret, sed quadrantẽ haberet qui 20 excederet unitates. qualis omnino futurus erat, qui prater Q & N haberet unitates 81. Est ergo obseruatione digna hac hypotheseos siue (ut noster ait) hypostaseos correctio artificiosissima. Latus etiam quadrati deinde 1 N —— 11 callidè statuit, ut absolutus numerus amplior quàm 101 fieret, & —— N exsisteret, aquatioq́; abiectis utrinq; 1 Q absolueretur. Nam 101 abiectis utrinq;, & additis 22 N, fit 20 aqualis 40 N, & 1 N est omnino $\frac{1}{2}$. & latus quadrati 1 N † 9, est $9\frac{1}{2}$. quadratus $90\frac{1}{4}$ seu $\frac{361}{4}$. Porrò numerorum, quorum unius in alterum ductu interuallum mensura & metientis conficitur, est interuallum $9\frac{1}{2}$. huius semissis $\frac{19}{4}$ in se, $\frac{361}{16}$ efficit, cui aquatur $9\frac{1}{2}$ N † 20. Aufer utrinque 20, quod idem est $\frac{320}{16}$: relinquuntur $9\frac{1}{2}$ N aquales $\frac{41}{16}$. & peracta diuisione 1 N deprahenditur esse $\frac{41}{152}$. Ergo primus ex hypothesi correcta est $90\frac{1}{4}$. secundus ($9\frac{1}{2}$ N) fiet $\frac{41}{16}$. tertius $\frac{1681}{23104}$, nimirum 1 Q. Experiamur, an postulatis quastionis hi numeri satis respondeant. Qua in re mirum in modum uos compendium suprà traditum adiuuabit.*

*Multipli-*

*Multiplicemus 90$\frac{1}{4}$ ($\frac{361}{4}$) per $\frac{1681}{23104}$. fient $\frac{1681}{256}$. (nam 361 & 23104 communem habent mensuram 361. & multiplicatio sic instituitur. $\frac{1}{4}$ per $\frac{1681}{64}$ multiplicetur, &c.) Tantũdem fit si medius in se ducatur. Sunt ergo tres inuenti numeri continuenter proportionales. Adde primo 20, fiet 110$\frac{1}{4}$ quadratus, lateris $\frac{21}{2}$. Ad secundum, $\frac{41}{16}$, adde $\frac{320}{16}$ (scilicet 20) habes $\frac{361}{16}$ quadratum lateris $\frac{19}{4}$. Adde $\frac{462080}{23104}$ (puta 20) ad $\frac{1681}{23104}$: habes quadratum $\frac{463761}{23104}$, cuius latus est $\frac{681}{152}$. Nihil ergo desiderari iure potest in nostris solutiõis numeris: ex quib. corriges Graecos, si ita uidebitur.*

III. Dato numero tres numeros adijciemus, ita ut quiuis eorũ & qui à binis producitur quibusuis, dato numero assumto fiat quadratus. sitq; datus numerus 5. In porismatibus hoc habetur, Si duo sint numeri, quorũ tam uterq;, quàm qui ex ipsis producitur unius in alterũ multiplicatiõe, semper dato numero adiecto fiant quadrati: eos exortos esse à duobus continenter proximis quadratis. Duos ergo quadratos ordine se consequentes statuo, laterum 1 N † 3, & 1 N † 4. Quadrati hi sunt, alter 1 Q † 6 N † 9, alter 1 Q † 8 N † 16. Ab utroq; horum tollo 5. & statuo alterum 1 Q † 6 N † 4, alterum 1 Q † 8 N † 11. Tertium summam horum, demta unitate, scilicet 4 Q † 28 N † 29. Restat ut hic quoq; adscito quinario sit quadratus. Ergo 4 Q † 28 N † 34 aequantur quadrato. Eius latus 2 N —— 6 statuatur. fit quadratus 4 Q † 36 —— 24 N, quod aequetur 4 Q † 28 N † 34. & fit 1 N, 26. Ergo secundum positiones, primus erit 2861. secundus 7645. tertius 2336.

IV. Dato numero, inuenire alios tres, ita ut quiuis ipsorum & qui ex binis quibusq; fit, detracto dato numero faciat quadratũ. Datus sit 6. Rursum similiter duos expono quadratos deinceps in ordine quadratorum constitutos: unum 1 Q, alterũ 1 Q † 2 N † 1. his adijcio datum. fiunt primus 1 Q † 6. secundus 1 Q † 2 N † 7. tertius itidem sit duplum amborum demta unitate. hoc est 4 Q † 4 N † 19. Fit 1 N, 17. Ergo secundum posita primus est 4996. secundus 729, tertius 2466.

XYLANDRI.

*Harum duarum propositionum explicationem si non adfero, mirari non debes. cum neq; solutiones uerae sint, neq; porisma cui innituntur (quod ex libris de proprietatibus numerorum ab autore scriptis desumtum fuisse apparet, quos desideramus) expressum sit, neq; cum eo hypostases, ut neq; cum ipsa propositione consentiunt. Videamus aequationem & solutiones. Aequatio statuitur inter 4 Q † 28 N † 34 & 4 Q † 36 —— 24 N. Vtrinq; abijciuntur 4 Q & 34: relinquitur aequalitas inter 2 —— 24 N & 28 N. ergo 2 aequantur 52 N. Itaq; 1 N est $\frac{1}{26}$. Hoc ad hypostases autoris accommodemus. Erunt latera quadratorum 3$\frac{1}{26}$ (1 N † 3) & 4$\frac{1}{26}$ (1 N † 4.) Proinde ipsi quadrati $\frac{6241}{676}$ & $\frac{11025}{676}$. Quorum utrunq; ubi quinario multaueris, habebis primum quaesitorum $\frac{2861}{676}$, secundum $\frac{7645}{676}$. Quod ad tertium attinet, aequatio ipsa demonstrat eũ duplum poni summa ipsorum numerorum unitate multatum. Nam si 1 Q † 6 N † 4 & 1 Q † 8 N † 11 addas, 2 Q † 14 N † 15 summa erit: cuius duplo 4 Q † 28 N † 30 si unitatem abstuleris, 4 Q † 28 N † 29 relinquitur pro tertio, qui addito quinario deinde cũ quadrato lateris 2 N —— 6 aequetur, ut 1 N fiat $\frac{1}{26}$. Ergo tertius est omnino $\frac{22316}{676}$. In Graeco aequationis soluta numeratur omissus est, perhibito denominatore: qui contrà deest solutionis numeris, ultimo etiam numeratore ambiguè scripto. Sunt ergo qui quaerebantur numeri $\frac{2861 \quad 7645 \quad 20336}{676}$. atq; hos ipsos inuenies, si hypostases per ualorẽ 1 N resoluas. Proinde ut postulatis satisfaciãt quaestionis, perspiciamus. De duob. primis, quin 5 utriq; adiecto, quadrati fiant, dubiũ non est, cùm sint ex hypothesi quadrati quinario multati. Adde 5 etiam ad tertium, nempe $\frac{3380}{676}$, fiet numerator (nam de denominatore quin sit quadratus, dubitãdi causa nulla relinquitur) 23716, quadratus, à latere 154. Ergo 5 addiius singulis inuentorum. Primo in secundum multiplicato fiunt $\frac{21872345}{456976}$. adde 5, hoc est $\frac{2284880}{456976}$, fit numerator 24157225, omnino quadratus à latere 4915. Idẽ hoc experieris etiam in reliquorum binorum multiplicatione, & quinarij ad productum adiectione. Verum ergo ingeniosissimi huius problematis solutionem eruimus. Superest ut porisma etiã ipsum ab effectu ad causam retrorsum instituta analysi inuestigemus. Quo loco memineris nos heic non in eo esse ut proprietates numerorum demonstremus, (neq; enim arithmeticam heic, sed logisticen tractamus:) sed ut Diophantum interpretemur. interim non dissimulantes, in hoc genere Algebricas operationes uim demonstrationum obtinere, quod & alibi, & ad superioris libri quadragesimamquartam propositionem docuimus. Hoc quoq; tenendum, quod ex Aristotelea analytica doctrina dicimus, ἱκανὸν sufficere unius exempli, quo totũ καθόλου repraesentetur;*

*quod*

*quod heic sequemur. Si de duobus quadratis, quorum latera unitate differunt, ita numerus aliquis idem subducatur, ut duplum summa residuorū unitate multato idem si adijciatur, quadratus existat: trium horum residuorum bina quos producunt numeros altero in alterum multiplicato, hi eodem illo aucti numero, ipsi quoq; quadrati fient. Sumamus duos quadratos, quorum latera unitate differunt, 4 & 9: & quæramus numerum qui ita ab utroque eorum auferatur, ut dupl. quoq; residuorum summa unitate multato idē additus, quadratū faciat. non enim quiuis numerus hoc præstat, etsi innumeri id præstent. Vtamur Algebra. Esto ille numerus 1 N. residua ergo 4 —— 1 N & 9 —— 1 N. horum summa 13 —— 2 N, duplum 26 —— 4 N, unitate demta, 25 —— 4 N. adde 1 N, fit 25 —— 3 N æquale quadrato. Deligendus est quadratus qui minor sit quàm 25. nā 25 ab eo detrahenda, & residuū per 3 N (charactere solutū) diuidendū esse, ratio dictat. 16 ergo sumemus, qui à 25 subductus, 9 relinquit, qui per 3 sine minutijs diuidi potest (alioqui uel 4, uel 9, uel ex fractis aliquē ortū adsciscere innumeris modis licebat: sed sectemur planissima.) Ita ergo æquatio existat 25 —— 3 N || 16, hoc est 9 || 3 N. & 1 N, est 3. Experiamur. 3 à 4 & à 9 sublatis, residua sunt 1 & 6. horum summa 7. duplum eius unitate demta, 13. huic 3 adde, habes 16, quadratū. Sunt ergo tria residua, 1, 6, 13. quorū bina quē produnt, is 3 auctus, quadratus fiat. Nā primū in tertiū si duco, 6 habeo. sex & tria quadratus sunt. secundo in tertium ducto, 78 fiunt, quæ cū 3 sunt 81. Primus in tertium fiunt 13, cū 3, 16. Aliud. 16 & 25 eodē modo tractemus, 81 —— 3 N æquātur quadrato. Is sit 36 (ut residuū per 3 diuidi integrè possit) erit 1 N 15. Hic à 16 & 25 detractus, relinquit 1 & 10, summa horū 11, duplū unitate demta 21, cui si addas 15, 36 quadratus cōfiet. Residua tria 1. 10. 21. quadrati qui fiunt producto binorū ad 15 adiecto, 25. 225. 36.* Canon. *Semper enim si tales duos quadratos addas, summæ duplò unitatē adimas: relinquitur quadratus. à quo si aliū minorē detraxeris, residuo per 3 diuiso emergat is qui quæritur numerus. Demonstratio ex ipsa operatione peti potest, si quis mediocriter sit exercitatus. sed eam hic mitto.* *Eandē ergo quarta etiā nauemus propositioni, eidē theoremati omnino innitēti, operā. hebetē enim esse oportet, qui si nō ultrò, saltē tot similibus quæstionibus tractādis nō perceperit positiones ut uarientur additione in mutationē detracta. Pro minore quadrato ponitur 1 Q, quod in superiore nō fecerat autor, ne 1 Q —— 5 posito primi loco, signa —— & † aliquid molestia offerrent inter se cōmissa in hypostasibus. quæ cautio ut minimè necessaria, ita elegās tamen est & callida. Ita nihil mutauimus. Primus sit 1 Q † 6, ut 6 dato inde ademto, maneat quadratus. Secūdus 1 Q † 2 N † 7, quia 6 abiecto, quadratus relinquitur 1 Q † 2 N † 1. Tertius duplū horū, minus unitate, 4 Q † 4 N † 25 fit. Qui cùm ipse etiā detracto 6 quadratus fiat, æquatio obtigit inter 4 Q † 4 N † 19. & quadratū 4 Q † 25 —— 20 N, à latere 2 N —— 5. Nā cū numeri Diophātei sint deprauatissimi, quorsum in illis corrigendis ego torquerē me, cùm de meo liceat expeditā promere solutionē. Tu, si libet & uacat (nā mihi uix ad hæc tēpus sufficit) correctionē uenare. Nostra æquatione 1 N proditur $\frac{1}{4}$. Ergo primus est $6\frac{1}{16}$ secūdus $6\frac{9}{16}$. tertius $26\frac{1}{4}$. à quorū singulis si 6 auferas, restāt quadrati $\frac{1}{16}$, $\frac{9}{16}$, $2\frac{1}{4}$. Duc primū in secūdum, habebis $\frac{10185}{256}$. aufer hinc 6, puta $\frac{1536}{256}$. relinquitur numerator (satis enim de denominatore liquet) 8649, lateris 93 quadratus. Eodem modo si cæteros binos examines: compertū habebis legitimè omnibus esse satisfactum postulatis.*

Theorema de quadratis, quorum latera unitate differunt.

Quartæ explanatio.

V. Inueniantur tres quadrati, ut quē duo quicūq; faciūt planū, siue addita siue detracta eorū summa sit, quadratus. Rursum hoc in porismatibus habemus. Omnib. duobus quadratis cōtinēter proximis adiūgi potest alius numerus, duplus summæ ipsorū & binario amplius, qui maiorē tres numeros facit, quorū bini quē pducūt, is amborū summa uel detracta uel addita fit quadratus. Ergo triū expositorū quadratorū facimus primū 1 Q † 2 N † 1. secūdū 1 Q † 4 N † 4. tertiū 4 Q † 12 N. Restat ut hūc quadrato æquemus. sed & quadrās eius quadrato æqualis est. Ergo 1 Q † 3 N † 3 æquantur quadrato. Huius latus fingo 1 N — 3. est ergo ipse 1 Q † 9 — 6 N, & æquatur 1 Q † 3 N † 3. Et fit 1 N, $\frac{2}{3}$. Ergo secūdū posita, primus erit 25, secūdus 64, tertius 196.

XYLANDRI.

*Falsum hoc esse nullo negocio deprahendes. Nā 25 & 64 sunt 89. & 25 in 64 ducto fiunt 1600. si addas summā, fiet 1689 si auferas, 1511. at horū neuter est quadratus. Sed & porisma uerū eo modo quo traditur, etsi corruptè traditur, uerū nō est. Hoc cōstat, si duo quadrati ordine (ut suprà) cōtinui sumātur, iisq; adiūgatur duplus summa ipsorū, binario auctus: qui fit binorū multiplicatione, summa ipsorū addita quadratū esse. Verbi gratia 4 & 9 quadrati sunt, inter quos*

Quadratorū continuorum proprietas.

l nullus

*nullus intercidit. 4 & 9 sunt 13. huius duplum & 2, sunt 28. is esto tertius. 4 in 9 facit 36. adde 13 summam eorum, fit 49. Item 9 in 28 facit 252. adde 37 summam ipsorum, habes 289. Denique 28 & 4 sunt 32. adde ad 112, quod fit ex 4 in 28, habes 144. notum est autem 49, 289, 144 esse quadratos. Aliud exemplum. 25 & 36 sunt 61. huius duplum & 2, sunt 124. Considera tres hos numeros. 25 in 36 producit 900. adde 61, habes 961 quadratum lateris 31. Item 36 in 124 facit 4464, adde eorum summam 160, habes 4624 quadratum cuius latus 68. Item 124 in 25 facit 3100, adde 149 eorum summam habes 3249 quadratum, cuius radix 57. Hoc igitur porisma constat sibi, estque ex Algebrica ductum & demonstratum operatione. In propositione ergo & quaestionis & porismatis summa detracto 10 perperam est posita: & porismatis uerba planè falsa sunt atque confusa. neque ἐκκαίδεκα quicquam ad rem facit. fortè pro exemplo 9 & 16 autor sumpserat, et quae nos posuimus, de Graeco interciderunt. sed & ubi tertius ponitur, μο̄ ιβ extritum fuisse, ratio & sequentia monstrant. Nam si in nostris exemplis tertius qui adiungitur quadratis, fuisset quadratus (28 uel 124) nihil opus erat hac quaestione. Nunc ut ea solui possit, pro quadratis statuit quos uides quadratos laterum 1 N † 1 & 1 N † 2 unitate differentium. Nam si statuisset 1 Q, & 4 Q tertius fuisset ductu porismatis 10 Q † 2, cui aequale quadratum effingi non potuisset. Heic cum tertius fiat 4 Q † 12 N † 12, diuiso eo per 4 quadratum, hoc est quadranti eius nullo negocio quadratus comparatur, ita latere constituto, ut saepe antè explicatam causam repetere nihil attineat. (Quod fieri etiam potuit, si toti quadratum à 2 N —— unitatib. certis aequaretur.) Aequatio etiam nullo negocio explicatur, & 1 N fit $\frac{2}{3}$. & 1 Q est $\frac{4}{9}$. Cùm ergo primus sit 1 Q † 2 N † 1 est $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{3}$, 1, hoc est in summa $\frac{25}{9}$. Secundus $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{3}$, 4, nimirum in summa $\frac{64}{9}$ (cuius latus $\frac{8}{3}$ unitate superat latus primi, quod est $\frac{5}{3}$,) ut uideas optimè omnia cohaerere. Tertius 4 Q † 12 N † 12 est $\frac{16}{9}$. 8, 12. hoc est $\frac{196}{9}$. ac tantundem fit si summam primi & secundi ($\frac{89}{9}$) duples, ac duplo ($\frac{178}{9}$) duo ($\frac{18}{9}$) addas. Ergo hypostasib. & porismati planè satis fecimus. An etiam quaestionis postulatis? Numeri quadrati sunt $\frac{25}{9}$ $\frac{64}{9}$ $\frac{196}{9}$. Primus in secundum ductus $\frac{1600}{81}$ procreat. summam ipsorum $\frac{89}{9}$ seu $\frac{801}{81}$ adde, confit $\frac{2401}{81}$ quadratus laterum $\frac{49}{9}$. (Certè subtractio summae locum non habet. relinquetur enim $\frac{799}{81}$, nequaquam quadratus.) Secundus in tertium ductus gignit $\frac{12544}{81}$. adde $\frac{260}{9}$ seu $\frac{2340}{81}$ summam eorum, fiunt $\frac{14884}{81}$ quadratus lateris $\frac{122}{9}$. Tertius in primum producit $\frac{4900}{81}$. bis adde summam eorum $\frac{221}{9}$ seu $\frac{1989}{81}$, conflatur $\frac{6889}{81}$ quadratus, cuius latus $\frac{83}{9}$. Nihil ergo non legitimè factum.*

VI. Inueniemus tres numeros, quorum quiuis binario mulctatus, fiat quadratus. & qui fit ex binis, siue summam amborum, siue totum abijciat, fiat quadratus. Si cuiuis superiore quaestione inuentorum numerorum adijciam 2, sic confecti satisfacient postulatis. Quod itaque dicitur, tale est. Ponimus unum eorum qui quaeruntur 1 Q † 2. erit secundus 1 Q † 2 N † 3, tertius 1 Q † 4 N † 6. itaque fit quod iubemur. Superest ut 1 Q † 4 N † 4 aequemus quadrato; & quadrantem, ut etiam 1 Q † 1 aequetur quadrato. Quòd si latus quadrati ponamus à differentia, erit 1 N —— 2. fit quadratus 1 Q † 5 —— 4 $\frac{1}{3}$ N, Q $\frac{1}{3}$ † 1. & fit 1 N, 3. Quod cùm positis accommodatur, erit primus 59, secundus 114, tertius 246. & euidens est demonstratio.

XYLANDRI.

*Quid heic facias, ubi neque propositio, neque solutio, neque tractatio te expedit? Sunt enim omnia falsa, & quid attinebat ambagibus uti in 1 Q † 4 N † 4 aequandis quadrato, si is numerus rectè haberet, cùm sit quadratus lateris 1 N † 2 notissimus. Iam illud ἐάν τε τὸν ὅλον, siue totum, quid sibi uelit, non satis assequor. In superiore quidem problemate summa omnium ($\frac{285}{9}$) si adderetur ex binis producto, quadrati non fiebant. quod ita esse res ipsa comprobat. Eo itaque omisso, saltem reliqua uideamus. Cur primum simpliciter 1 Q statuat, monui ad superiorem propositionem. Tertius, quando ad superiorem propositionem & eius porisma respicitur, erit 4 Q † 4 N † 4. cui addendus est, ut reliquis, binarius, ut sit 4 Q † 4 N † 6 tertius. Ergo 4 Q † 4 N † 4 aequatur quadrato, itemque quadrans eius 1 Q † 1 N † 1. huic aequalem quadratum pono lateris 1 N — 2 (uidetur 2 uocasse differentiam, quia singulis 20 dempto fiunt quadrati) scilicet 1 Q † 4 —— 4 N. fit 1 N $\frac{3}{5}$. Ergo resolutis hypostasibus, primus erit $\frac{43}{9}$. secundus $\frac{82}{9}$ tertius $\frac{214}{9}$. De horum singulis si auferas 2, siue $\frac{18}{9}$ habebis reliquos quadratos $\frac{25}{9}$, $\frac{64}{9}$, $\frac{196}{9}$. Iam primo in secundum ducto $\frac{3526}{81}$ producuntur, summa ipsorum sub eodem nomine est $\frac{1125}{81}$, qua detracta à primo, $\frac{2401}{81}$ relinquit quadratum (omnium summa subtracta, relinquitur $\frac{475}{81}$, nequaquam quadratus. quod propter ὅλον illud annotandum duxi obiter.) Summa secundi & tertij est $\frac{2664}{81}$, quam si auferas à plano ex ijs orto $\frac{17548}{81}$, relinquitur quadratus $\frac{14884}{81}$. Summae tertij & primi est $\frac{2313}{81}$. ea subducta à producto unius in alterum $\frac{9202}{81}$, relinquit $\frac{6889}{81}$ quadratum,*

*quod*

*quod potest experiri. Ergo aliud hinc emergit theorema siue porisma, superiori ab altera parte respondens cũ binarij prærogatiua. Expositis enim tribus, ut in superiore propositione numeris, si binarius singulis adijciatur, quẽ sic facti bini producunt, is summa eorũ multatus fit quadratus. Numeri 4. 9. 28. aucti binario, 6. 11. 30. Et 66 —— 17,330 —— 41,180 —— 36, quadrati oẽs. Aliud. 16, 25, 84. aucti binario, 18, 27, 86. producti 486, 2322, 1548, binorũ summa ab his auferendæ 45, 113, 104. residui quadrati 441, 2209, 1444, laterũ 21, 47, 38. Diophantea emendare nõ prohibeo quin coneris: ego quod mearum partium fuit, peregi.* Binarij & continuè quadratorũ proprietas.

### LEMMA AD ID QVOD SEQVITVR.

VII. Inueniantur duo numeri, ut qui fit ductu alterius in alterum, addito utriusq; quadrato, fiat quadratus. Sit primus 1 N, alter unitatũ quotlibet. ac sit 1. Eorũ multiplicatio producit 1 N, summa quadratorum 1 Q † 1. Adde 1 N, fit 1 Q † 1 N † 1 æquale quadrato. Huius latus sit 1 N — 2. fit quadratus 1 Q † 4 — 4 N, quod æquatur 1 Q † 1 N † 1. fit 1 N 3. Ad posita hoc referamus. Erit primus 3, secundus 5. & sublato denominatore, numeri ipsi erunt 3 & 5. qui postulatis respondent. Nam qui ab ipsis fit quadratus, cũ plano quẽ ipsi gignunt cõiunctus, quadratũ facit. Quoties aũt cũq; uoles ternarium & quinariũ sumere, facient numeri qui nascuntur, id quod iuberis.

### XYLANDRI.

*Sæpenumerò mihi usu uenit, id quod & heic, ut ex re de uerbis autoris uitiatis cõiecturã cogar facere. Quis enim intelliget alioqui Græca nostra? Hac ergo propositione requiritur, ut productus ex hypotenusa in minus trianguli rectanguli latus multiplicatione, additis quadratis eius lateris & hypotenusæ, conficiat quadratũ. id priuilegij numeris 3 & 5, & eorũ æquè multiplicib. (id est si quocũq; numero 3 & 5 multiplicaueris: idq; uolunt ultima uerba propositionis) in præsentia arrogatur. Nã quib. inseruit quæstionib. hoc lẽma, ea satis ostẽdunt ad penultimã primi Euclidis respici. cui in primis numeros 3. 4. 5. cõmodè adhiberi, notißimũ est. De alijs diametralib. inueniendis, ad 8 & 35 secundi, nec nõ alibi, perspicuè docuimus. Sic aũt ratiocinari expedit. Numeri ipsi, quos quærimus, sint 1 N & 1. Hi producunt altero in alterũ multiplicato 1 N. Quadrata ipsorũ 1 Q & 1. Omnib. additis, 1 Q † 1 N † 1 æquatur quadrato, quod in textu rectè exprimitur, 1 Q † 4 —— 4 N à latere 1 N —— 2. Heic si utrobiq; addas 4 N, abiectis 1 Q, habebis 5 N † 1, æquales 4. ergo detractione unitatis utrinq; facta, 5 N æquãtur 3. ac proinde 1 N est $\frac{3}{5}$. Tantus est primus, secundus $\frac{5}{5}$. & rectè abijci cõmunẽ denominationẽ ipse Diophantus monet. Sunt ergo numeri 3 & 5. neq; hi solũ sed quicũq; eandẽ habẽt proportionẽ, quã 3 & 5. hoc est quocũq; eodẽ numero 3 & 5 multiplicẽtur, producti postulatis satisfacient. Enimuerò 3 in 5, faciunt 15. ipsorũ quadrati sunt 9 & 25. quib. si addas 15, habes 49 quadratũ. Iam si 3 & 5 per 7 multiplicemus, proportio manebit eadẽ, argumento 17. VII. Euclid. Erunt aũt 21 & 35. Horum multiplicatione planus producitur 735. adde huic quadrata numerorum, 441 & 1225, summa 2401, quadratus numerus. Nõ aũt esse hoc cuiusuis in rectãgulo hypotenusæ et minoris rectũ facientium lateris, facilè disces. Si quis enim hoc affirmet, instãtia eius dictũ euertemus. Nã 5. 12. 13. sunt latera orthogonij. 5 minus latus, hypotenusa 13. altero in alterũ ducto fit 65. adde 25, & 169, eorũ quadratos, summa 259, numerus minimè quadratus. Cæterùm latius patere hanc propositionẽ, quàm ut triangulo orthogonio soli adstringatur, docuisse obiter in rẽ (puto) erit. Ponantur numeri, 1 N & 6. Ergo 1 Q † 6 N † 36 æquabuntur quadrato. qui etsi ipse uariè potest effingi, ut suprà sæpe monuimus: tamen latus ei statuamus 1 N —— 8. quadratus ergo 1 Q † 64 —— 16 N æquatur 1 Q † 6 N † 36. Fit 1 N, quod obscurũ non est, $\frac{14}{11}$. Ergo alter est $\frac{14}{11}$, alter $\frac{66}{11}$, & denominatore abiecto, 14 & 66. immò sumemus primos horũ 7, & 33. Hi producunt 231, & quadrati sunt 49 atq; 1089. summa omniũ 1369, quadratus lateris 37. At 7 & 33 nõ sunt latus minus (immò ne latus quidẽ omnino) & hypotenusa rectanguli trianguli. nã si 49 ab 1089 auferas, relinquitur 1040, numerus minimè quadratus. Itaq; pronũciamus, facere quidẽ multũ ad rectanguli trianguli considerationẽ hoc problema: sed amplius tamen uim suã protẽdere, quàm eius ut terminis includatur. cætera in sequente propositione examinabũtur. Verba hæc, Nã qui ab ipsis, fit enim, sic sunt legẽda, Nã qui ab ipsis fiunt quadrati, cũ plano quẽ ipsi gignũt cõiuncti, quadratũ faciunt. Porrò quosuis duos numeros, si ipsorũ quadrati duplo ex ipsis multiplicãdo cõpositi adijciantur, quadratũ conficere, notũ est ex quarta secundi Euclideorũ elemẽtorum. Sed hic planus fit instar duorum supplementorum.*

LEMMA AD ID QVOD SEQVITVR.

IIX. Inueniantur tria triangula rectangula, quorum æquales sint areæ. Primum quærantur duo numeri, quorum quadrati coniuncti cum eo qui fit ex altero in alterum, faciant, cuius latus sit 7. Compono tria triangula rectangula à numeris binis, 7 & 3, 7 & 5, ac denique 7 & 8 (quæ est summa 3 & 5 inuentorum numerorum.) Ergo à 7 & 8 erunt triangula 40, 42, 58. & 24, 70, 74. & 15, 112, 113. quorum omnium eadem est area 840.

* 

XYLANDRI.

*Ita est ad uerbũ in Græco. sed nemo facile intellexerit. Equidē in ueris (quos rationales uocēt) numeris hoc præstare, ut omnia latera sint rationalia, adeoq́ numeri integri, nō est cuiusuis aut uulgaris operæ. Itaq́ conabimur illustrare. Primò ex præcedenti liquet, septenarij quadratũ ea esse cōditione, ut cōponatur ex 3 et 5 quadratis, eoq́ quod fit altero in alterũ multiplicato. Sed quid hoc ad triangulũ rectangulũ pertineat, nondum liquet. Si in triangulo orthogonio rectũ angulũ includentiũ laterũ alterum in alterũ ducatur, duplũ ipsius areæ produci, notissimũ est. Ergo si de triangulo orthogonio, cuius latera sint 3, 4, 5, & qui πυθμὴν in hoc genere habetur, agamus: aream eius habebimus 3 in 4 ductis, & producti semisse accepto, 6. Præstat horum laterũ æquè multiplicia sumere, ut aream habeamus numero tali expressam, qui trifariã binorum cōpositione fiat. Si aream statuissemus 24, latera angulum rectũ includentia poterant esse 6 & 8, uel 4 & 12, uel 3 & 16, uel etiã 2 & 24. atq́ sic non tria, sed quatuor rectangula habuissemus triangula, quorum omnino eadem fuisset area. Sed hoc ijs deest, quòd hypotenusæ non fiant: sunt omnes rationales. Nam lateribus 6 & 8 rectum includentibus, fieri hypotenusam 10, manifestum est. at reliquorum essent √ 160 √ 267. √ 580. quod est ab autoris instituto alienum, mirificis quadratorum inuentionibus & comparationibus surdos numeros quasi eludentis, aut potiùs triumphum ex ijs agentis quendam. Oportebat ergo laterũ orthogonij cuiusq́ angulum rectum facientium eam esse naturam, ut & quadrati binorum conficerent quadratum, & producti ex binis ijdē essent. Nota quod potissimum sunt in huius quæstionis tractatione, intercidit: scilicet superioris propositionis ad præsentem quæstionem accommodatio: & ipsorum deinde triangulorum trium inuentio. Ad hanc rem opus est nouis siue porismatis siue theorematis. quæ cum noster nobis Diophantus suppeditare non possit, de nostro largiamur: non heic demonstraturi ea, sed re comprobaturi. Ipsos hos, de quibus agitur, triangulos ex superiore propositione miro artificio deduxit Diophantus: sed magna est iactura uerborum eius facta. Exponit quatuor numeros, duos superiori lemmati respondentes, tertium datus quadrati qui conficiebatur plano & quadrato illorum coniunctis, quartum summam duorum primorum. Hi ergo sunt in minimis terminis 3. 5. 7. 8 Si primum in reliquos, itemq́ deinceps quemlibet in sequentes ducas, sex fient numeri 15. 21. 24. 35. 40. 56. ea (quod in arithmetica demonstratur) conditione, ut primo in sextum, secundo in quintum, tertio in quartum ductis, idem semper numerus producatur 840. qui duplum areæ esset, si binis latera trianguli positi essent qui eum producunt, ut area fiat 840, secundus, quartus & sextus duplicantur. Atque ita sunt quos autor posuit trianguli orthogonij, omnes areæ æquali, & lateribus omnibus uero numero constantibus, & 47 primi planissimè satisfacientes. At hi quidem certè trianguli, cum trigono 3. 4. 5. præter orthogonij illam uniuersalem proprietatem nihil habent commune: ut neq́ inter se etiam, nisi quòd arearum æqualitas accedit. Aliam ergo horum laterum proponemus inuentionem, multo subtiliorem, & ad rem propiùs pertinentem. Latera triangulorum sic com fiunt, 7 (qui numerus erat latus quadrati per præcedentem facti propositionem) cum 3, 5, ac summa horum 8 seorsim commisso. Duc 7 in 3, habes 21. eius duplum 42, est unum latus. Quadrati 49 & 9, horum interuallum 40, est alterum latus. tertium hypotenusa fit quadratorum additione, 58. Rursum 7 in 5 gignunt 35. ergo unum latus angulum rectum facientium 70. quadrati 49 & 25. ergo 24 alterum, hypotenusa 74. Denique 7 in 8, producunt 56, ut alterum latus sit 112. quadrati 49 & 64: horum interuallum 15, est alterum. hypotenusa autem summa quadratorum 113. Heic demum mirificè prodest eorum consideratio atque usus, quæ ad 22 tertij annotauimus de triangulorum inuentione. uide infrà 6. 1. Perpendamus ergo nonnihil accuratius. Statuatur triangulus rectangulus laterum rectum includentium 7 ac 3 (septenarius etiam in altero triangulo committetur*

*cum*

*cum 5, qui alter est inuentorũ numerus, & sunt minimus, atq; utroq; multiplicato qui illam horũ proprietatẽ sartã tectã propaget.) huius ergo erit hypotenusa quadratũ 58, ipsa √ 58. quales numeri hosc non admittũtur. Ergo aliũ triangulu cõparemus nobis, cuius omnia latera sint rationalia: et huius quidẽ hypotenusa maneat 58. cuius quadratus est 3364. Quadrata laterũ priorũ 49 & 9, interuallũ habẽt 40. hoc erit unũ latus, eius quadratũ de 3364 deductum, 1764 relinquit, quadratũ reliqui lateris, quod est 42. Habes ergo aliũ triangulũ orthogoniũ, 40. 42. 58. in cuius inuentione etiam ratio lucet, cur prioris area numerus duplicatus, in præsentia siue basis siue cathetus (nã perinde est) posterioris fiat orthogonij. Persequi molestũ est, iudicasse satis fuerit, eodem modo reliquos autoris triangulos ex his 7.5. √ 74. & 7.8. √ 113. esse deductos. Hoc ergo cõsecuti uidemur, ut & inuentionẽ horũ triangulorũ eruerimus, & theorema, quo superior propositio accõmodetur propositio, detexerimus. Si enim duo sint numeri, quorũ unius in alterũ multiplicatione factus additis eorũ quadratis quadratũ cõficiat: huius radix cũ istorũ utroq; seorsim, & cũ summa ipsorũ cõmissa, suppeditabit latera angulũ rectũ includẽtia triangulorum rectangulorũ bina: ex quib. per tradita ad XXII tertij huius operis, tres trianguli producãtur, quorũ sint areæ æquales, & omnia latera ueris cõstent numeris. Atq; hoc ipsum minimè adstringitur ad numeros 3 & 5, eorũue multiplices. sed & quicũq; alij p superiorẽ propositionẽ inuẽti, et eorũ æquè multiplices huc accõmodari possunt: ut uix ullũ toto opere elegãtius theorema exstare cõstet. Itaq; nõ pigebit etiã aliud exempli exbiera locũ magno cũ detrimẽto rerũ arithmeticarum decurtatũ utcũq; in integrũ restituere. Quærãtur duo numeri, quorum quadratis si adijciatur productus ex unius in alterum multiplicatione, summa sit numerus quadratus. sint hi 1 N & 2. Ergo 1 Q ✝ 2 N ✝ 4 æquatur quadrato. eius latus esto 1 N — 3. quadratus 1 Q ✝ 9 —— 6 N. & rite omnib. peractis, 1 N est $\frac{5}{8}$, & alter $\frac{16}{8}$. Sed nos abiecto denominatore (id est utroq; per 8 multiplicato) sumemus eorũ loco 5 & 16. Hi planum faciũt 80, qui ad 25 & 256 eorũ quadratos adiectus, summã facit 361, quadratũ. Hoc ad propositũ theorema cõferamus. Quadrati huius latus est 19. summa inuentorũ numerorũ 21. Statuamus ergo tres triangulos rectangulos, quorũ omniũ basis eadẽ sit 19, catheti 5, 16, 21. Erunt hypothenusæ √ 386. √ 617. √ 802. Ex his eliciemus tres triangulos alios orthogonios, quorũ area eadẽ, latera sint rationalia. Primus triangulus erat 5. 19. √ 386. Quadratũ de 386 est 148996. Laterũ quadrata 25 & 361. interuallum 336. huius quadratus 112896 de priore sublatus, relinquit 36100, quadratũ lateris 190. In locum ergo dicti trianguli succedet alius rectangulus triangulus, cuius latera 336. 190. 386. secundo triangulo 16, 19. √ 617. substitues eodẽ artificio 105. 608. 617. Tertio canon idẽ subrogabit 80. 798. 802, cum fuisset 21. 19 √ 802. Palàm est sic inuentos triangulos esse rectangulos ex 47 primi Euclidis. Sed & latera omnia ueris expediuntur numeris: nõ sine miraculo. Enimuerò siue 336 in 190, siue 105 in 608, siue 80 in 798 multiplices: semper producitur 63840, cuius dimidium singulorum areas numero 31920 exprimat. Itaq; non iam tres, sed ternos triangulos innumeris uicib. te inuenire docui, quibus hæc & sequens quæstio soluatur. Obseruaui horum triangulorum aream esse ad Diophanteorum aream, ut est 38 ad unitatem.*

IX. Inueniantur tres numeri, ut uniuscuiusque quadratus summa omnium siue demta siue addita, quadratus fiat. Omnis trianguli rectanguli quadratum hypothenusæ quadratus fit, siue ei addas siue adimas quadruplum areæ. Ergo isti tres erunt hypothenusæ triangulorum rectangulorum: & summa ipsorum erit quadruplum areæ trianguli rectanguli, cuius hypothenusæ sunt ipsi numeri. Eò itaque res redit, ut quærenda sint talia triangula tria, quorum area sit eadem. Id autem iam demonstratum est. & sunt trianguli 40, 42, 58, & 24, 70, 74, & 15, 112, 113. Ergo propositum repetens, statuo in numeris tres subtẽsas triangulorum. & erit primus 58 N, secundus 74 N, tertius 113 N. Summam autem quadruplorum areæ in Quadratis. Ergo 3360 Q æquantur 245 N. fit 1 N, 7. & iuxta positiones, erit primus 406, secundus 518, tertius 791.

XYLANDRI.

*Numeri, immò omnia, pessimè habent in Græco. Res autem ita habet. Summa hypothenusarum 58. 74. 113. est 245. Ergo hanc 245 N appellat, cum nulla intercesserit multiplicatio, & N adijciatur singulis hypothenusis. Quadruplum areæ est 3360, cui adijcit notam Q 1. Fit enim area, multiplicando semissem catheti in basin. ut in triangulo, cuius latera 40 N, 42 N, 58 N*

*(cui æquales sunt cæteri.) basis fit ex 20 N in 42 N, aut 40 N in 21 N ductis, uidelicet 840 Q. eius ergo quadruplũ est 3360 Q. ita uerò non 7, sed $\frac{7}{96}$ fit 1 N. Hypotenusæ per 7 multiplicatæ, omisso denominatore sunt 406, 518, 791. uerũ omitti is nõ debet, neq; potest. sunt ergo qui quærũtur numeri $\frac{406}{96}$ $\frac{518}{96}$ $\frac{791}{96}$. Summa omniũ $\frac{1715}{96}$, siue $\frac{164640}{9216}$. omnib. per 96 multiplicatis, quia quadrati numerorũ eundẽ sint habituri denominatorem, 9216. numeratores aũt inuenies 164836. 268324. 625681. De denominatore satis liquet, quadratũ esse. Si summa omniũ addas numeratorẽ iã inuentis, exsistent 329476. 432964. 790321. quadrati oẽs, laterum 574. 658. 889. Quòd si summa numeratorẽ de quadratorum numeratoribus singulatim abstulisse, relicti fuissent 196, 103684, 461041, quadrati numeri, laterũ 14, 322, 679. quod fuit demonstrandũ, ne uera subtilissimi problematis absolutione lectorẽ defraudaremus. Tuũ est exercitatiõis loco eadẽ in à me inuentis triangulis experiri. Quod ad trianguli hãc proprietatem attinet rectanguli, eadem suprà fuit lib. 3. propos. 22. proposita. & in his ipsis, aliisq; omnibus experiri licet.*

X. Datis tribus numeris quadratis, inuenire licet tres numeros, quorũ bini quadratos istos producant alter in alterum ductus. Nam si sint dati quadrati 4, 9, 16. & statuamus unũ quæsitorũ esse 1 N, reliqui erũt 4 N, & 9 N. ac superest, ut secũdus in tertiũ multiplicatus producat 16. atqui producit 16 Q, æquales quadratis 16. & 1 N fit $1\frac{1}{5}$. Ergo secundũ positiones, primus erit $1\frac{1}{5}$, secũdus $2\frac{1}{5}\frac{1}{8}$. tertius 6. Sed ut hoc etiã methodo exponatur, inueni 36 Q æquari 16. & omnia per 1 Q. fiunt 16 Q æqualia 36. & fit 1 Q 36. cuius latus 6. Sed 6 à laterib. fiunt 4 & 9, hoc est secũdo & tertio; & portio, hoc est 4, latus est quadrati 16. Ergo cũ iussus fueris tres numeros dare, quorũ bini quadratos datos producant, ut heic 4, 9, 16. duc 4 in 9, fiunt 36. diuide in latus quadrati 16, fit primus sex Nũc rursus diuide quadratũ 4 per 6, fiunt 6. Erit ergo primus 6, secundus 16, tertius 6.

XYLANDRI.

*Hæc ita ut sunt deprauata transcripsi. Est enim faciliùs rem tradere quàm uerba corrigere. Statuo primũ 1 N, secundũ[a], tertiũ[b]. Ita enim primus in secundũ ductus 4, in tertiũ 9 producet, charactere N se mutuo abolente. nam[c], id est 4 N per 1 N diuisi, sunt 4, &c. at secundus in tertium ductus facit[d] æquale 16. Stat æquatio reducenda multiplicãdo transuersè, quod per crucẽ uocãt[e]. fit ergo 36 æquale 16 Q. atq; hoc est quod omnia per 1 Q iubet multiplicari Diophantus nã[f] per 1 Q multiplicata, faciunt 36, hoc est numerator denominatore ipsum diuidente liberatur. & 16 per 1 Q multiplicata, fiunt 16 Q. Iã si 16 Q sunt 36, 1 Q erit $\frac{36}{16}$, hoc est $\frac{9}{4}$. ergo 1 N, radix huius quadrata est $\frac{3}{2}$ seu $1\frac{1}{2}$. Sunt ergo numeri $1\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$ (pro $\frac{2}{3}$ noster Græca ambage $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{6}$ scripsit, quæ sunt $\frac{3}{6}$ & $\frac{1}{6}$, hoc est $\frac{4}{6}$, nempe $\frac{2}{3}$) & 6. Nam $1\frac{1}{2}$ in $2\frac{2}{3}$ duc, habes 4. in 6, habes 9. rursum $2\frac{2}{3}$ in 6, habes 16.* Canon *ergo quem ex hac elicitum operatione Diophantus indicauit hic est. Datis tribus quadratis, ut inuenias tres numeros, quorũ bini eos producãt: duc primũ in secundum, producti (satis constat quadratum esse) latus diuide per latus tertij, inuenies primum numerum per hunc diuide quadratum primum, habes secundum numerum. Tertium inuenies, secundo quadrato per primum numerum aut tertio quadrato per secundum numerum diuiso. Specimen. Quadrati dantur 36. 225. 900. Multiplica 36 per 225, fit 8100 huius, latus 90 per latus tertij 900, quod est 30, diuide, habes primum 3. per hunc diuide 36, habes secundum 12. Diuide uel 900 per 12, uel 225 per 3, habebis & tertium 75. Sic quadratis datis 36. 64. 144. inuenies numeros 4. 9. 16. quod tibi relinquo explorandum. proxima propositione & usum huius quæstionis, & canonis exemplum multo abstrusius habebis.*

a $\frac{4}{1N}$
b $\frac{9}{1N}$
c $\frac{4N}{1N}$
d $\frac{36}{1Q}$
e $\frac{36}{1Q} \times \frac{16}{1}$
f $\frac{36}{1Q}$

XI. Inueniantur tres numeri, ut qui fit ex quibusuis duobus, omnium summa uel addita uel detracta, quadratus fiat. Rursum initiò quærantur tria arearum triangula. quibus repertis, sumimus quadratos hypotenusarum. Est autem tertius quidem 334, quintus uerò 476, primus autem 2769. quos nacti, inuenimus ut iam traditum est tres numeros, quorum bini multiplicans alter alterum, istos producant quadratos. Exposuimus autem hos, quia quiuis ipsorum siue addas ei, siue adimas 3360, fit quadratus. Sed 3360 numerus duplum est areæ singulorum triangulorum. Eapropter nunc in Numeris pono, primũ 4292 N, secundũ etiã 43732 N, tertium 7187. quorum bini faciunt supradictos quadratos. Restat ut hi tres æquentur

3360 Q. Et omnia ut unius fiant denominationis, conijcimus 555796. & 1 N 568510 eiusdem denominationis. tertius 9225431 eiusdem denominationis. & fiũt hi tres N 19901. 5211. partis 55791, æquales 3360 Q. & omnia in 55796. & fit 1 N, 19901. 5211 æquales Q 18747. 4560. & fit 1 N 19901. 5214. partis secundæ unitatis unius, & primæ 8747. & unitates 4760 communis cuiusdam partis sumtæ. quod fieri nequit, cùm numeri sint primi inuicem. Erit 1 N, 19901. 5214, partis 18747. unitatẽ 561. ad positiones, erit primus quidem * * *

XYLANDRI.

*Quæstio hæc, ut apparet, è duabus est composita præcedentibus. uerum & solutionis numeri desunt, & reliqua omnia ita sunt uitiata, ut insanire mihi dedita opera uidear, si coner absq; codicis adminiculo ea corrigere. Videamus an soluere quæstionem nostro Marte possimus, auspicijs tamen Diophanteis. Omnium summa in propositione intelligi debet non productorum, sed eorum trium, ex quibus binis producentur ij quos uolumus. Etenim si producti statuantur hypotenusarum trium orthogoniorum suprà octaua propos. inuentorum quadrati, summa autem eos componentium 3360: iam uno postulatorum defuncti sumus, cùm 3360 quadruplum (ita est legendum, itaq; res habet) area cuiusuis æqualium quod ad areas triangulorum istorũ, additum aut detractum quadrato hypotenusæ cuiusuis eorum, utroq; modo quadratum facere ex superioribus iam constet. Quadrati hypotenusarum 58.74.113. sunt 3364.5476.12769. (qui numeri mutilati sunt in textu.) Iam per præcedentem quæremus binos, quorum multiplicatione hi exsistant. Duc primum in secundum fient 18421264, cuius latus quadrati 4292, per tertij latus (quod est 113) si diuidas, primus componentium erit $\frac{4292}{113}$. Per hunc si diuidamus 3364, quadratum primum, componentium secundus emerget $\frac{95033}{1073}$. Tertius, quadrato secundo per primum numerum diuiso, prodetur $\frac{134697}{1073}$. Hi tres numeri si cum nota N ponantur loco quæsitorum, dubium non est quin hypotenusarum quadratos charactere Q insignes bini sint producturi eos quos exposueramus. quorum singulis siue addas siue auferas 3360 Q (nam hoc charactéris quadruplo areæ multiplicando N in N nascitura deberi, etiam ad nonã suprà docuimus) fiant quadrati: addendo quidem 6724, 8836, 16129, laterum 82, 94, 127: detrahendo autem, 4, 2116, 9409, laterum 2, 46, 97. Restat ut componentium summa, signo N notata, æquetur 3360 Quadratis. Laboriosa utcunq; est operatio: sed uel Diophanto sic mutilato, uel rudiorum imperitia subuenire liberalis est hominis. Antequam longiùs progrediar, experiemur an bini istos quadratos hypotenusarum producant: non qui dubitemus, sed ut canonem superiore propositione traditum, nouo exemplo & insolenti demonstremus, simulq; logisticorum compendiorum usum exhibeamus. Primum $\frac{4292}{113}$ in $\frac{95033}{1073}$ secundum multiplicaturus, recordor eorum quæ in horum inuentione mihi usu uenerunt. est enim 4292 ad 1073 quadruplus. Ergo 95033 per 113 diuide, habebis 841 (horum enim multiplicatione iste exstiterat) id per 4 multiplica, habes 3364 primum illorum quadratorum. Multiplica primum $\frac{4292}{113}$ in tertium $\frac{134697}{1073}$, hoc est, ijsdem cõsideratis $\frac{4}{1}$ in $\frac{134697}{1}$, habes secundum, 5476, hypotenusæ quadratum. Denique ut secundũ in tertiũ multiplices, denominatores inter se multiplicari oportet, itidemq; numeratores. Numerator in numeratorẽ ductus, 14701320001 producũt. denominatoris quadratus 1151329 si hũc productũ diuidat, omnino 12769 prodit, tertius hypotenusæ quadratus. Nihil ergo etiã erratũ est. itaq; ad solutionẽ quæstionis nos cõferamus. Denominatores inuentorũ numerorũ (1073 & 113) esse inter se primos, ex 2 septimi Euclideorum facilè disces. Quærẽdus est igitur harũ minutiarũ cõmunis denominator, & ad eum tres istæ nouis numeratorib. redigendæ minutiæ. Sic aũt stabũt reducta $\frac{4505316 \quad 10738729 \quad 17480761}{121249}$. Summa porrò triũ quos inuenimus numerorũ, est $\frac{118124806}{121249}$. Ergo $\frac{118124806}{121249}$ N æquantur 3360 Q.*

XII. Vnitatẽ diuidemus in duas portiones, quarũ utriq; datũ numerũ ita adijciamus, ut fiat quadratus. Oportet aũt datũ neq; imparẽ esse, neq; duplũ eius N unitas maiorem habere quadrantẽ quàm est numerus, quo ipsum metitur primus numerus. Imperatum sit, ut utriq; portioni adiungamus 6, itaq; efficiamus quadratũ. Esto summa duorũ qui sic fiunt quadratorũ, 13. Est ergo 13. diuidẽdus in duos quadratos, quorũ uterq; maior sit senario. Ergo si 13 diuidã in duos numeros, quorũ interuallũ unitate sit minus, soluo quęstionẽ. Sumo semissem de 13, qui est $6\frac{1}{2}$: & quæro quam partem possim ad $6\frac{1}{2}$ adiungere, ita ut quadratum conficiã. Multiplico per 4. quęriturq; postmodo pars quadrata, quę si ad 26. adijciatr̃, fiat quadratũ. Sit pars apponẽ-

da, t Q fiunt 26 † 1 Q æqualia quadrato, & si omnia per 1 Q multiplicentur, 26 Q † 1 æquabitur quadrato. eius latus pono 5 N † 1. fit 1 N, 18. Nam Quadratus est 100, & quadrati pars $\frac{1}{100}$. ergo 100 apponetur ad 26, & ad $6\frac{1}{2}$ apponetur $\frac{1}{400}$. facitq; quadratum, cuius latus $50\frac{1}{2}$. Oportet ergo tredecim ita diuidere in duos quadratos, ut utriusq; latus proximè accedat ad 51. Et quæro quis ternarius defectu, accipiens binarius, producat 51. Statuo itaq; duos quadratos à lateribus 11 N † 2 & 3 —— 9 N. & fit summa quadratorum ab his ortorum 202 Q † 13 —— 10 N, quod æquatur quadrato. & fit 10 æqualis quadrato, & 1 N fit 5. Ergo alterius quadratorum est latus 256, alterius 258. & si auferamus ab utroq; quadratorum inde factorum 6, alterũ unitatis segmentũ erit 5358, reliquũ 4846. & liquet horum utrunq; 6 adscito fieri quadratũ.

XYLANDRI.

*Imitari statueram bonos grammaticos hoc loco, quorum (ut aiunt) est multa nescire. Ego verò nescio heic non multa, sed pæne omnia. Quid enim (ut reliqua taceam) est μήτι ὁ διπλασίων αὐτῶ ἀρ̄ μο̄ α, &c. quæ causa huius προσδιορισμῶ, quæ processus? immò qui processus, quæ opt ratio, quæ solutio? Cæterùm ab hac, si placet ordiamur, & uideamus quid confici possit. Si 5358 & 4846 unitatem componunt additi, unitas erit 10204, scilicet $\frac{10204}{10204}$, ut appareat denominatorem prioribus fuisse amputatum. Porrò senarius hoc modo fieret (parumper dissimulato denominatore) 61224. Is ad 5358 & ad 4846 additus, 66582 & 66070 facit. qui duo numeri cùm altero in alterum ducto quadratum non producant, (alibi enim demonstrauimus nullum numerum in binarium aut unicam o finientem, esse posse quadratum) ad nihil recidit omnis spes nostra retexendo saltem aliquid inueniendi. nam hi quidem quadrati non sunt. Primùm hoc constat, horum duorum quadratorum, qui quæruntur, summam fore 13. cum uterq; ultra senarium alteram unitatis partem habeat, quæ ambæ simul unitatem constituant. Est ergo (quod in uerbis autoris mãsit integrum) danda opera, ut 13 in duos diuidatur quadratos, quorum uterq; maior sit senario, neque tamen unitatem ipsorum interuallum æquet: ne incurratur contra hypothesin. semissem de 13, hoc est $6\frac{1}{2}$, per 4 multiplicat Diophantus: scilicet numerum quadratum. & fingit partem quadrati alicuius (totus enim nullus est unitate minor: quod heic requiritur) adjiciendam esse 1 Q. Ergo 26 † 1 Q æquabitur alicui quadrato, si uerba sequimur. Quod autem ait omnib. in quadratum ductis fieri 26 Q † 1, perobscurum est, immò autem liquidò falsum. Vide, quæ suprà lib. iv. propos. xxxvij, ac deinceps annotauimus. Verùm heic alius est error, quẽ deprehendere non est cuiusuis. Non 1 Q, sed [a] partem aliquotam Quadrati nondum noti, ad 26 adjici uult Diophantus. Ergo 26 † [b] æquabitur quadrato: & si per Q (ut quadratum) multiplicetur illud, fit 26 Q † 1, rursum quadratus, si quidem antea ponebamus fuisse quadratum: argumento eorum, quæ ad initium noni Euclideorum traduntur. Et hac [c] ad 26 additio similis est huic, si 26 & $\frac{1}{4}$ addidissem, 26 per 4 multiplicatis, itemque $\frac{1}{2}$ per 4: fierẽt enim $\frac{105}{4}$, &c. Fingamus nunc quadratum, cui æquetur 26 Q † 1, à latere 5 N † 1: (nimirum ut 1 utrinque abiecta, æquatio inter 1 Q & N fiat.) Is est 25 Q † 1 † 10 N, aufer utrinque 26 Q † 1, restat 1 Q æqualis 10 N. Ergo 1 N est 10 (corrigito mendas textus ipse, si lubet, ex nostris) & 1 Q est 100. & [d] est $\frac{1}{100}$. Nam hoc ad 26 adiecto, quadratus fit $\frac{2601}{100}$, cuius latus $\frac{51}{10}$. Ergo ad $6\frac{1}{2}$ quadrantem eius, $\frac{1}{400}$ adjiciatur itidem quadrati particulæ quadrans, fiet quadratus $\frac{2601}{400}$, cuius latus $\frac{51}{20}$. Reliqua monstra sunt, non præcepta à Diophanto. Latera quadratorum summam 13 confecturorum solertissimè instituit acutissimus arithmeticus 2 † 11 N, & 3 —— 9 N (Sic enim poni debent:) ut unitatum absolutarum quadrati 4 & 9 in comparatione ad 13, abolere & aboleri possent, itaq; inter Q & N æquatio reperiretur. Quadrata sunt 121 Q † 44 N † 4, & 81 Q † 9 —— 54 N. summa horum 202 Q † 13 —— 10 N, rectè in Græco superstes. Ergo 1 N fit $\frac{5}{101}$, cùm summa illa æquetur 13. quod cuiuis non rudissimo in procliui est intelligere. Hypostases nunc ad 1 N æstimationem deuocemus. Erunt latera $\frac{257}{101}$ & $\frac{258}{101}$. horum quadrati uterq; sex unitatibus multati, cùm integri sint $\frac{66049}{10201}$ & $\frac{66564}{10201}$, fient $\frac{4843}{10201}$ & $\frac{5358}{10201}$, quorũ residuorum summa omnino est unitas, itaq; satisfactum quæstioni haudquaquam uulgari. Cur autẽ, inquies, in laterib statuẽdis 11 N ad minorẽ sunt additi numerum, de maiore 9 N subtracti? quid ad hoc facit 1 N, quem 10 esse inueneramus, & reliqua inde producta? Multũ sanè. Nam cum latus inuentum esset $\frac{51}{10}$ ea ratione, neq; tamẽ planè quæstioni satisfieret (est enim quadratus $\frac{2601}{400}$ utiq;, sed si eum à 13 subducas, relinquitur $\frac{2589}{400}$, non item quadratus) usus sua εὐστοχίᾳ sic posuit latera, ut æquatione inuenta, utrunq; resolutis positionib. nõ longè abesset à $\frac{51}{10}$. Quippe so*

Margin notes: [a] $\frac{1}{1Q}$ [b] $\frac{1}{1Q}$ [c] $\frac{1}{1Q}$ [d] $\frac{1}{1Q}$

*pe si ponas ut 51 ad 20, sic 257 aut 258 ad 101, extremi 5151 producent, medij 5140 uel 5160, inter quos ille quasi medius est. Verba hæc, Et quaro qs ternarius, &c. & hoc innuũt, ternariũ cũ certorũ Numerorũ defectu, binariũ cũ certorũ Numerorũ additione collocari debere. atq; operæpretiũ est hæc subtilitatẽ Diophanti penitius introspicere. Summã quadratorum cùm uideret ad 13 comparatum iri, 2 & 3 (ut monui) delegit, quorum quadrata faciunt 13. Et quia latus utriusque debuit quàmproximè ad $\frac{51}{20}$ accedere, quod est 2 $\frac{11}{20}$: ideo 1 N interim finxit esse $\frac{1}{20}$. Ita latus unius statuitur 2 † 11 N, & alterius 3 —— 9 N, quorũ utrunq; fit 2 $\frac{11}{20}$. tantũdẽ.n. fit $\frac{9}{20}$ à 3 subtractis, quantum si $\frac{11}{20}$ ad 2 addas. Hac neq; obuia sunt cuiuis, & lucem sequentib. inferunt. ideoq; explicanda duxi. Quod ad conditiones dati numeri attinet, uidetur posterior hoc uelle, debere eum qui datur duplum esse alicuius numeri primi. Quod autem imparem esse non uult, sic exploremus. Sit 7. Ergo summa quadratorum 8. Quærendũ ergo est, quæ pars quadrati ad 4 addita quadratũ faciat. 4 est quadratus, cui si pars quadrati, puta $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{25}$, &c adijceretur, numerator collectus ex producto quadrati in quadratum & unitate, quadratus fieri nõ posset. non enim ullus numerus quadratus quadratum unitate excedit. Sit datus 11. Ergo summa quadratorum fiet 12. Ad 6 addi potest $\frac{1}{4}$ pars quadrati, ut fiat quadratus $\frac{25}{4}$, cuius latus $\frac{5}{2}$. Certè expediri reliqua ex dictis canonibus poterunt, inuentis duobus numeris, quorum quadrati 12 conficiant, &c ut planè de his conditionib. non habeam, nisi ampliùs.*

XIII. Vnitatẽ secare, & adijcere utriq; segmẽto aliũ atq; aliũ datum numerum, itaq; quadratum conficere. Sint addendi segmentis unitatis alteri 2, alteri 6 itaq; cõficiẽdi quadrati. D 2 a 1 b 6 c Exponatur unitas a b, & secetur in c. addaturq; ad a c binarius a d, ad c b aũt senarius b e. utrũq; ergo, e d & c e est quadratus. Et cũ a b sit 1, a d aũt & b simul iũctæ faciãt 8. Ergo tota d e, cõtinẽs etiã unitatẽ a b, & 9. diuidi aũt d e oportet in duos quadratos c d & c e. Sed qm̃ quadratorũ alter, c d, maior est binario a d, minor aũt q̃ ternarius d b: eò res rediit, ut 9 (quadratus datus) diuidi debeat in duos quadratos d c & c e, quorum ille inter 2 & 3 incidat. Nã inuẽto ac dato quadrato c d, cùm d a binarius sit, dabitur etiam residuum a c. Porrò a b est unitas: ergo etiam c b datur, quod ad unitatẽ ultra c b restat. dabitur etiam c, in quo unitas secatur. Iam descriptionis ductum sic exsequamur. Esto alter quadratorum, is q inter 2 & 3 incidit, 1 Q erit alter 9—1 Q. Atq; hoc æquatur quadrato. Facilè res conficitur. Scilicet inueniẽdus est quadratus binario maior, ternario minor. Sumamus duos quadratos, unum binario maiorem, alterũ ternario minorem, qui sunt 289 & 361. iam si 1 Q ita adornemus, ut inter hos incidat, explicabitur quæstio. Oportebit ergo latus etiam 1 Q, hoc est 1 N, poni maius quàm 17, minus quã 19. Ergo oportet quærentes 9—1 Q, inuenire Numerũ quadrati maiorẽ quã 17, minorẽ quàm 19. Q. si 9—1 Q æquale quadrato statuimus: huius latus fingẽtes 3—aliquot N: inueniem. 1 N ortum ex aliquo numero sexies sumto, & diuiso per numerũ unitate maiorẽ, q̃ est quadratus numeri sic sumti. Redacti sumus itaq; eò, ut numerum indagemus, cuius sesculum si diuidatur per numerum unitate q̃ illius est quadratus maiorẽ, quotiens q̃ 17 maior, q̃ 19 minor sit. Esto qui quæritur 1 N † 1. & quæro, ut iuxta latã cõditionẽ 6 N diuisi p 1 Q † 1 quotiẽtẽ faciãt maiorẽ q̃ 17, & minorẽ q̃ 19. Sed & 17 p 12 diuisus quotientẽ q̃ 17 facit maiorẽ. opportet itaq; 6 N ad 1 Q † 1 maiorẽ habere rationẽ, q̃ quæ est 17 ad 12. Quod ergo fit ex 6 N in 12, puta 72 N, amplius erũt quã 6, dimidij. In seipsum, fit 1296. aufer quadrata in unitates, hoc est 289 maiorẽ, restat 1007, cuius latus nõ est maius 31, adde semissem Numerorũ, fit nõ minus quã 67. diuide per multitudinẽ numerorũ, fit 1 N, 67. Similiter 5 Q in numeros 6 ad 1 Q † 1 minorẽ rationẽ habere inueniemus 1 N haud minorẽ 60. sed ne maiorẽ quidẽ 60. fit 3 $\frac{1}{2}$. Fingo latus quadrati à 3—3 $\frac{1}{2}$ N. fit quadratus 11 Q † 9—21 N. Hęc ęquant 9—1 Q. ergo 1 N, 84. nã 7056 * & si hinc auferamus 2, erit unũ segmentũ unitatis 1838, ergo alterũ 1081 & postulato satisfit.

XYLANDRI.

*Quæstio elegãs, & tractatio subtilis est, sed uerba autoris deprauata Si partes unitatis sunt 6838 & 1081, ergo ipsa est 2019 & binarius erit 5838. Sed is cũ neutra partiũ cõiũctus quadratũ faciet nõ ergo habemus ueros solutiões. Sed hoc quoq; uerũ nõ est, quadratũ lateris 3—3 $\frac{1}{2}$ N fieri 11 Q † 9—21 N. fit.n. 12 $\frac{1}{4}$ Q † 9—21 N. cui si æquatur 9—1 Q, abiecto utrinq; 9, & 1 Q † 21 N utrinq; adiectis, æquatio erit inter 13 $\frac{1}{4}$ Q & 21 N, & 1 N omnino fiet $\frac{84}{53}$. & 1 Q erit $\frac{7056}{2809}$. quã si à 9 auferamus, hoc est à $\frac{25281}{2809}$, relinquitur $\frac{18225}{2809}$, Tãtus ergo est quadratus C E, latus eius $\frac{135}{53}$. C D autem*

*aũt quadratus & eius latus iã sunt indicata. Sed & partes unitatis nullo negocio inuenientur, si C D à 3 (ab D B,) & C E à 7 (ab A E) subtrahas. relinquẽtur. n. C B 1371, & A C 1438 partiũ, qualium integra unitas est 2089. Et si 2 ad A C adycias, $\frac{7056}{2809}$ habebis quadratum. si 6 ad C B, habebis $\frac{18225}{2809}$ quadratum. Estq; postulatis quæstionis abunde & uerissimè satisfactum. Ita cum unum latus quadrati 3—3 $\frac{1}{2}$ N corruptele superfuerit, cætera omnia ad solutionem pertinentia non magno labore restituimus. segmentorum numeri ueri α̅ υ̅ λ̅ η̅ & α̅ τ̅ π̅ α̅. denominator communis β̅ ω̅ ϑ̅. Sed iam ea quoq;, quib. ad latus quadrati sic instituẽdum autor rem perduxit, consideremus. D C quadratus est ex hypothesi maior quàm 2, minor quàm 3. qualem inuenimus $\frac{7056}{2809}$. cum 2 sint $\frac{5618}{2809}$, 3 autem $\frac{8427}{2809}$. Talem quadratum in integris numeris nemo dabit. At in fractis hoc faciũt $\frac{289}{144}$ & $\frac{361}{144}$. cùm 2 sint $\frac{288}{144}$, & 3 sint $\frac{432}{144}$. Et hoc facile fuit deprahensu. aliquot parib. quadratis examinandis, qui sumerẽtur loco denominatoris, & quadratus duplo proximè maior impar aliusq; ab eo proximus itidem impar, uiso an hic etiam minor sumti triplo esset. Verbi gratia sumatur 64. duplum 128. quadratus 169. proximus impar 225. maior triplo de 64, &c. Ergo cùm quæstio sit quid 1 Q ualeat (hoc enim inuento facile fuerit de 9—1 Q & reliquis statuere) latus eius, puta 1 N debet statui maius quàm 17, & minus quàm 19. hi enim numeri sunt latera quadratorum 289 & 361, & nullo incommodo heic denominatores dissimulantur. Cæterùm quia 9—1 Q est ex hypothesi quadratus, quæstio exsistit de latere eius fingẽdo. qđ rectè instituitur 3—aliquot N, ut 3 in se ductus, 9 in quadrato dato aboleat, & inter Q ac N æquatio oriatur. sed quot N à 3 debeant detrahi in lateris positione, id minimè est euidens. neq; enim quiuis numerus idoneus est, cũ 1 Q oporteat intra 2 & 3 incidere. Fingamus interim 3—8 N latus esse, cuius quadratus 9 + 64 Q—48 N æquetur 9—1 Q. & uideamus qui 1 N ualor eliciatur: (hoc enim uolũt sibi uerba Diophãti perobscura illa, Inueniemus 1 N ortũ ex aliquo, &c.) Abycimus utrinq; 9. deinde 1 Q ac 48 N adycimus utrobiq;. fit æquatio inter 65 Q & 48 N. & 65 diuisor fit, 48 diuidẽdus ex regula. & 1 N fieret $\frac{48}{65}$. Sed repugnat hypothesi. cùm enim sit unitate inferior, eius quadratus inter 2 & 3 incidere nullo pacto potest. Sed Diophantus acutè numeros 65 & 48, eorũq; originẽ considerat. 48 est sexies octo, qđ quadrãdo 3—8 N fiebat. nam bis 3 in 8 ducitur. At 65 est ipsius 8 quadratus unitate auctus, quod quadrato de 8 N adycitur 1 Q insuper, ut & ab altera æquationis parte ad 9—1 Q defectus ille cõpleatur. Hinc ergo noua procuditur hypothesis illa: Redacti sumus itaq; eò, &c. quæ indagatur, quot N detrahẽdi sint ternario, ut latus quadrati cõstituatur, hypothesib. saluis. Nu-*

a $\frac{6\ N}{1\ Q + 1}$ *merũ hunc qui denuò quæritur, 1 N statuit (+ 1 librarij uitio ei accreuit) ergo a, (sesquiplũ scilicet diuisum per quadratũ unitate auctũ) amplius est quàm 17, minus quàm 19. Quæ sequũtur planè sunt mutilata & falsa. Quis. n. credat 17 per 12 diuidendis quotientẽ exsistere maiorẽ ipso diuiso? Sed intelligendum ita est quod dicitur. 6 N diuisi per 1 Q + 1, amplius sunt quàm $\frac{17}{12}$ (nõ. n. 17, sed $\frac{17}{12}$ propriè est qui huc pertinet numerus.) ergo statuuntur quatuor quantitates, 6 N ad 1 Q + 1 maiore ratione quàm 17 ad 12. & per demonstrata in arithmeticis, si extremi multiplicentur alter in alterum, itemq; medij, illorũ productum q̃ horum erit maius. utq; id intelligas quale sit, $\frac{5}{6}$ maius est quàm $\frac{3}{4}$. scilicet 5 per 6 diuisus præstat 3 p 4 diuiso: ergo quinquies quatuor amplius sunt q̃ sexies 3. cũ illud 20, hoc sit 18. Multiplicamus ergo 6 N per 12, & 17 per 1 Q + 1 fit 72 N maius q̃ 17 Q + 17. Ergo 72 N—17 (17 utrinq; abiectis) amplius sunt q̃ 17 Q. Fingamus æquari. habebimus conuexam æquationem 1 Q (omnia per 17 diuido) & $\frac{72}{17}$ N—1. Multiplico $\frac{36}{17}$ in se (ut semissem N) fit $\frac{1296}{289}$. inde aufero 1, hoc est $\frac{289}{289}$, restant $\frac{1007}{289}$. cuius radix quadrata seu latus præcisè dari nõ potest, sed proximũ est $\frac{31}{17}$, adde his $\frac{36}{17}$, habes $\frac{67}{17}$, ac tantus ferè e-*

b $\frac{6\ N}{1\ Q + 1}$ *rat 1 N. sed oportet esse aliquãto minorẽ. Rursus b minus sunt quã $\frac{19}{12}$. Ergo quatuor his quantitatib. expositis 6 N, 1 Q + 1, 19, 12, eodẽ modo agentes quo antè, inueniemus 72 N minus esse q̃ 19 Q + 19. Ergo 72 N—19 minus sunt q̃ 19 Q. Fingamus æquari, &, ut prius, æquationem absoluamus, fit 1 N ferè $\frac{66}{19}$. sed oportet aliquantulo esse minorem. Iam $\frac{67}{17}$ sunt 3 $\frac{16}{17}$ nimium, & $\frac{66}{19}$ sunt 3 $\frac{9}{19}$ iusto minor. Et cũ is de quo agitur in noua hypothesi, intra duos hos tanquam limites statuatur, ac $\frac{9}{19}$ semissem, qui à $\frac{16}{17}$ exceditur, nõ planè æquet: prudẽtissime 3 $\frac{1}{2}$ statuitur is, qui per has ambages quærebatur, numerus. Cætera sunt explicata. Indicari potest uel hoc problemate, quantas ærumnas exanclauerim, dum Diophantum ab inferis quasi in lucem reuoco.*

XIV. Vnitatem in tres diuidamus numeros, & cuiuis addamus primum datum numerum eundem, itaque singulos quadratos efficere. Oportet autem datum numerum neque binarium esse, neque eorum quenquam, qui octuplicando binario nascuntur.

nascuntur. Sit datus numerus 3. Rursum 14 diuidendus sit in tres quadratos, ut quiuis eorum sit 3. Si igitur rursus 10 diuidamus in tres quadratos, ut quiuis eorum maior sit adæqualitatis comparatæ ductus, erit qui ipsorum maior ternario. & poterimus ternario à quouis eorum subtracto eos inuestigare, in quos unitas diuidebatur. Sumimus itaque trientem denarij, hoc est $3\frac{1}{3}$, & exploramus quæ'nam pars à quadrato denominata ei possit adijci, ut fiat quadratum. Omnia nouies. Iam ad 30 oportet partem à quadrato denominatam addi, ut fiat quadratus. Sit ea 1 Q. & omnia multiplicentur per 1 Q, fiunt 9 Q † 1 æqualia quadrato lateris 5 N † 1. fit Quadratus, 1 Q † 10 N † 1, æquale quadrato 1 Q † 1. Ergo N 1, est 2, & 1 Q, 4. Si ergo ad 30 adijcimus 4, ad $3\frac{1}{3}$ adijcientur 36, & fiet 121. Oporter ergo 10 diuidere in tres quadratos, ut cuiusq; latus sit adæquale unitati. At 10 conflatur ex duobus quadratis, 9 & 1. diuidimus 1 in duos quadratos 9 & 16, ita ut 10 constet ex tribus quadratis, 9, 16, 9. Horum cuiusuis lateri oportet statuere adæqualem 14. Sed & latera eorum sunt 3, 4, 3. & omnia tricies. fiunt 90 & 24 & 18. & 14 fiunt 50. Oportebat itaque unumquoduis latus adornare 50. Fingimus unius latus 3 —— 6 N. secundi 31 N † $4\frac{1}{3}$. tertij 37 N † 10. Quadrati horum in summa sunt 3025 Q † 5 —— 116 N. hæc æquantur 10. unde inuenitur numerus 196. Applicetur hoc positionibus, & fiunt latera quadratorum data: ergo & reliqua sunt manifesta. *

XYLANDRI.

*Non semel statui quæ sic monstrosè corrupta essent, relinquere in præsentia, ne Caciæ instar nubes sibi attrahentis uiderer mihi ipsi molestias attrahere. Sed uel excitandorum aliorũ causa mutaui consilium, laboremq; impendendum esse duxi, ut eo superari etiam eas difficultates, quas tam desperauissemus posse expediri, ostenderem. Propositum est unitatem diuidere in tres portiones, ut singulis adiectus ternarius, nobis exhibeat quadratum. Conditionem numeri portionib. addendi, ut & suprà, nõ dubito experiẽtia cossicarũ operationũ cõcepisse autorẽ. Primùm numeri quadrati tres qui fient, ter 3 erunt, & unitas. Ergo diuidẽdus est 10 (nõ 14) in tres quadratos, quorum quiuis ternario sit maior. quiuis enim ipsorum fit ternario ad unitatis certam partem adiecto. Multa nobis adiumẽta conferet duodecima propositionis paulò antè à nobis tradita explicatio. Triens denarij assumitur hoc loco $3\frac{1}{3}$, quia de tribus agitur quadratis, & quæritur quænam pars quadrati ad eum adiecta, quadratum faciat. Ea sit [a]. Ergo $3\frac{1}{3}$ † [b] æquatur quadrato. Ergo omnibus per 9 multiplicatis (numerorum quadratum) etiam 30 † [c] æquatur quadrato. Ergo ut loco dicto demonstrauimus, 30 Q † 9 æquabuntur quadrato. Sed hoc non uoluit (dices) Diophantus, quantum quidem ex reliquijs licet coniectare. Nos uerò cum omnia discrepent, institutam prosequemur operationẽ. Esto latus quadrati 5 N † 3 (utrinq; enim abolendus est 9, &c.) eius Quadratus 25 Q † 30 N † 9 æquabitur 30 Q † 9, & 1 N erit 6. & 1 Q erit 36, & [d] erit $\frac{1}{36}$. Proinde $3\frac{1}{3}$ † [e] est $\frac{10}{3}$ & $\frac{1}{36}$, hoc est $\frac{121}{36}$, certè quadratus, cuius etiam uestigium extat in textu. nam quia nouies $3\frac{1}{3}$ sunt 30, id & rationem secuti, omissis quæ in medio supersunt mendis, ad rem peruenimus. Quid sit illa παρισότης non possum satis adsequi, ideoq; ad uerbum reddidi. Non sum nescius 10 in tres quadratos diuidi, duos 9 & 1. & hunc denuò in $\frac{9}{25}$ & $\frac{16}{25}$, quæ res * suo loco fuit tractata. Verùm reliqua neq; cohærent (ut ad nos peruenerunt) cũ præcedẽtib. quicquã, neq; omnino intelligi possunt. ne quid de laterũ positione querar, quorum quadratorum summa ei quæ ponitur nihil quicquam respondet: quæ ipsa summa æquationem insolentem contra morem Diophanti, in conuexis tribus formis exhibet, solutione etiam non uera. Quocunq; nos uertamus, diuidendus est 10 in tres quadratos, quorum quiuis ternarium superet, interuallorum autem summa unitatem conficiat. hoc enim intelligendum est, etsi uerba μεῖζον ἢ τ̃ παρισότητος ἀγωγὴ manca & praua id non exprimunt. neq; illa πάρισος μο̄ α̅. Horum unus inuentus erat, ut docui, $\frac{121}{36}$. Sed quasi repudiatus posthac uidetur: neque ex uerbis textus liquet uel cur inuentus, uel cui adhibitus rei fuerit. Si ad duodecimam huius respicimus, apparet idcò inuentum, ut trium quadratorum latera singula quàm proximè ad $\frac{11}{6}$, latus inuenti, accedere debere intelligamus. Sed παρισότης illa, & denarij in tres quadratos diuisio, & maximè à præsenti prudẽs quæ sequitur statim propositio, ostendunt opinor aliũ Diophanto scopum fuisse propositum. Alioqui si $\frac{121}{36}$, hoc est $3\frac{13}{36}$ de 10 subtrahamus, relinquuntur $6\frac{23}{36}$ & eò res uidebitur deducta, ut $\frac{23}{36}$ diuidendus sit in duas partes, quarum utraque cum ternario quadratum conficiat. Sic enim unitas in tres fuerit diuisa partes,*

*quarum*

a $\frac{1}{1\,Q}$
b $\frac{1}{1\,Q}$
c $\frac{9}{1\,Q}$
d $\frac{1}{1\,Q}$
e $\frac{1}{5\,Q}$

* Lib. 2. propos. 8.

*quarũ singula ternario aucta quadratũ exhiberẽt: (qđ unũ poscimur) & iã inuenta est una harum $\frac{1}{36}$. sed Diophãtus nimirũ aliã rẽ egit. quod quale sit, utina inuestigare liceat. Experiamur si quid ex illa denarij in tres quadratos diuisione possimus exsculpere. Ergo 9 $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. tres sunt quadrati, summa eorum 10. latera 3 $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{5}$. suprà per 9 multiplicato 3 $\frac{1}{3}$, factus erat 30. & inuentum, si $\frac{1}{36}$ ad 3 $\frac{1}{3}$ adijceretur, fore quadratum. Ergo si ad eius nonencuplum $\frac{9}{36}$ siue $\frac{1}{4}$ adijciamus, quadratus itidem habebitur 30 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{121}{4}$. Nam sicut 2 & 7 faciunt coniuncti quadratum 9. sic utergą quadrato si multiplicetur, (uerbi gratia per 16.) 32 & 112 fient, quorum summa 144 quadratus. Item 3 & 13 faciunt 16 quadratum. Multiplica utrũą per 100, habes 300 & 1300, quorũ summa 1600. quadratus. uel per 81, habes 243 & 1053, quorum summa 1296 quadratus. de quo theoremate hæc satis. Itaą, ut minutia uitentur, latera istorum quadratorum quorum summa 10, singula autor per 30 multiplicauerit: fiunt certè 90. 18. 24. qui numeri sunt in contextu superstites. Sed quorsum pertinent, aut quid sibi uolunt tandem illa 50? Sanè laterum summa ad rẽ nihil conducit: neą etiam est 50, sed 132. Cur uerò latera per 30 multiplicantur, numerum minimè quadratum? Summa omnium quadratorum debet fieri 10. hoc liquet. Sed & latus quodque ternarium excedere debet, ita quidem, ut omnium excessuum summa sit 1. de hoc quoque constat. Oportebit ergo latus quodą quàm proximè ad $\frac{11}{6}$ accedere. quod ipsum exploratum habemus. Quadratorum à lateribus 90, 18, 24, summa est 9000, non gentecupla ad 10. quæ summa esse quadratorum debuit. sunt autem 900 quadratus de 30, qui numerus latera multiplicauerat. $\frac{11}{6}$ per 30 multiplicatum, fit 55. ad quem numerum apparet fieri debere comparationem, παρισότητα nimirum illam Diophanteam. Elucescit etiam causa illius per 30 multiplicationis. Nam uitare uoluit, ut monui, autor minutias. itaą hos numeros $\frac{3}{1}$. $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{11}{6}$ omnes per 30 (communẽ denominatorem) multiplicauit. ut 90. 18. 24. 55. numeri inter se primi exsisterent. Ergo pro παρισοῦν ῑ δ scribendum παρισοῦν ιᾱ ἐκτημορίοις. & pro τοῦ ϛ ῑ δ γίνονται ν, reponendum τοῦ ϛ ιᾱ ἐκτημόρια γίνονται νε̄. Quo pacto autem latera ad 55 comparentur, & quo pacto insitui seu fingi debeant, in tanta caligine, quantam hæc librarius offudit, uidere non possumus fortasse. cùm præsertim solutionis numeri nos destituant, & laterum æquationisą numeris se committere, hominis sit hoc loco parum cauti. Equidem manifestum est, 3025 quadratum esse numeri 55. Sed & 31 ac 37 sunt interualla inter eum & 24 atque 18. quæ latera fiebant, itidem 90 cum 55 comparanda. Sed si quadrata istorum interuallorum 961 & 1369 coniuncta, hoc est 2330 à 3025 auferas, relinquetur 695 numerus nequaquam quadratus, & latere qualicunque posito non proditurus eius in se multiplicatione. Sed & cur ad 31 N adijciatur 4 $\frac{1}{3}$, & 10 ad 37 N, rationem explicari non puto posse, aut cur pro 90 ponatur latus 3 — 6 N. Itaque exitum rei ut inueniamus, nihil nobis suppeditatur auxilij. neque apparet ulla propositæ æquationis ratio. Sequamur nunc coniecturam, nobis à duodecima huius libri tractatione suppeditatam. Laterum 90, 18, 24, quadrati summam faciunt 9000. Quæ latera dum ad 55 accommodamus singula, ita erunt instituenda, ut absolutorum numerorum quadratis eam summam æquantibus, & inuenta æquatione abolentibus, inter N & Q reliquum æquationis consistat, atque ita quid 1 N sit deprahendatur. Statuamus latera 90 — 35 N, 18 † 37 N, 24 † 31 N: interim posito 1 N esse 1. sic enim quodą latus erit 55. Horum laterum quadrati sunt 8100 † 1225 Q — 6300 N, 324 † 1369 Q † 1332, 576 † 961 Q † 1488 N. Summa omnium 9000 † 3555 Q — 3480 N, æqualis 9000. Ergo additis detractisą ijs quæ ratio iubet, æquatio constabit inter 3555 Q & 3480 N. hoc est, characteribus depressis, & numeris ad minimos redactis terminos, inter 237 N & 232. Ergo 1 N erit $\frac{232}{237}$. Equidem ad molestas minutias res redijt. Sed animum despondere non est nostrum. Resoluamus ergo hypostases ualore 1 Numeri potiti. 35 N sunt $\frac{8120}{237}$, qui à 90 detracti, puta à $\frac{21330}{237}$, relinquunt primam hypostasin $\frac{13210}{237}$. Eadem ratione secundam inuenimus $\frac{12850}{237}$. tertiam $\frac{12880}{237}$. Horum quadrati ordine sic exponuntur $\frac{174504100 — 165122500 — 165894400}{56169}$. Horum summa planissimè est 9000. nimirum $\frac{505521000}{56169}$. Ergo analysi utamur, & singula iam inuenta latera per 30 diuidamus, ita quadratorum summa erit 10. & de quouis horum ternario subtracto, partes unitatis sese ostendent. Latera $\frac{1321 — 1285 — 1288}{711}$, quadrati $\frac{1745041 — 1651225 — 1658944}{505521}$. Summa eorum $\frac{5055210}{505521}$ utique 10. Denique auferamus de singulis quadratis ternarium, siue $\frac{1516563}{505521}$ relinquuntur partes unitatis $\frac{228478 — 134662 — 142381}{505521}$. quarum sanè partium summam præcisè esse unitatem, additio demonstrat. Habes ueram & exquisitam omnium huius problematis partium solutionem*

*atą*

Quadratorum compositorũ proprietas.

*atque explicationem, ex qua etiam uerba Græca corrigere potuissem, si imitari uoluissem eos, qui sua uerba supponunt autoribus. Quanto labore me ex his difficultatibus expediuerim, aliis mandum æquo & diligenti lectori relinquo.*

XV. Vnitas diuidenda est in tres numeros, addendusq; cuiuis eorum alius atque alius datus numerus, ut summa quælibet sit quadratus. sint autem dati, 2, 3, 4. Rursum eò res redijt, ut denarium diuidam in tres quadratos, quorum primus binarium, secundus ternarium, tertius quatuor superet. Ergo unitate in duas diuisa partes, & semisse singulis datorum addito, fit ut quærendus sit quadratus unus maior quàm 2, minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. alius maior quàm 3, minor quàm 3 $\frac{1}{2}$. denique alius maior quàm 4, minor quàm 4 $\frac{1}{2}$. eoque omnia deducuntur, ut 10 ex duobus conflatum quadratis, subdiuidam in alios duos, quorum alter maior sit quàm 2, minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. ab hoc si 2 abijciamus, partem unitatis quæsitam primam habebimus. Rursum alium quadratorum subdiuidam in duos, quorum alter maior sit quàm 3, minor quàm 3 $\frac{1}{2}$. à quo item 3 si abiecero, secundam unitatis partem inuenero. Eadem etiam tertia inuenietur ratione.

XYLANDRI.

*Obscurum non est, quin ad decimamtertiam propositionem huius libri se habeat hæc propositio, sicut præcedens ad eiusdem duodecimam. Vides autem, quomodo res proposita & exposita sit. Certè 10 diuiditur in tres quadratos 9, $\frac{16}{25}$, $\frac{9}{25}$: sed hi ad id quod hoc loco agitur, nihil faciũt, ut prima fronte uidetur. Iam quod de semissibus unitatis dicitur, non explicatur, neq; ratio uel causa adfertur ulla: neq; uestigia habemus quæ consectemur. Itaq; amplius.*

XVI. Datum numerum in tres quadratos diuidemus, ut bini coniuncti quadratum conficiant. Sit is 10. Quoniam de tribus qui quæruntur numeris maior & medius cum tertio faciunt quadratum, itemq; medius cum tertio, & tertius cum primo: Ergo tres isti bis sumti, tres faciunt quadratos, quorum quisque minor est quã 10. At tres hi bis sumti conficiunt 20. Diuidendus igitur est 20 in tres quadratos, quorum quiuis minor sit denario. Iam 20 è duobus componitur quadratis, 16 & 4. Et si de quæsitis unum ponamus 4, oportebit 16 diuidere in duos quadratos, quorum quiuis minor sit quàm 10. Didicimus autem datum quadratum diuidere in duos quadratos, ut unus eorum maior quidem sit quàm 6, minor autem quàm 10. sunto ambo 16 unitates. Itaque diuisus sit in tres quadratos, quorũ quilibet denario sit minor. & si unumquemq; auferamus à denario, inueniemus reliquos, quorũ bini coniuncti quadratum faciant. Deest ἐλάσσων.

XVII. Datum numerum in quatuor numeros diuidemus, quorum terni coniuncti quadratum faciãt. Sit ille 10. Quoniam qui à primo deinceps tres iuncti quadratum faciunt, itemque qui à secundo, qui à tertio, qui à quarto deinceps. sic utique quatuor consiunt quadrati. Atqui sic fiunt 30. Ergo 30 diuidendus est in duos quadratos, quorum uterque minor sit denario. Hoc autem sic inuenietur, si per ad æqualitatem statuo utrunque unitatum 7, & utrunque quadratorum auferamus à denario, inueniemus quæsitos. Sin autem, animaduerto 30 componi ex 16, 9, 4, 1. Ponemus 4 & 9, quando uterq; minor est quàm 10. Restat ut 17 diuidamus in duos quadratos, quorum uterque minor sit quàm 10. Si ergo 16 diuidamus in duos quadratos, uti didicimus, quorum uterq; maior sit quàm 8, minor quàm 10, erit utterque ipsorum minor quàm 10. unde si utrunq; eorum auferamus, reliquos deprehendemus de quæsitis, alterum 6, alterum 1. itaq; soluta erit quæstio. παρισότης.

XIIX. Tres numeri sunt inueniendi, ut cubus summæ eorum, quouis ipsorum adiecto cubus exsistat. Statuamus eam summam 1 N, quæsitos aũt 7 C, * C, 63 C. constat hoc, cubum summæ cum quouis positorum iunctum, cubum præstare. Reliquum est, ut tres isti coniuncti, faciant in summa 1 N. atqui consiunt 96 C. ij ergo æquantur 1 N: & depresione facta 96 Q æquantur unitati. Vnitas quidem, quadratus est. ac si 96 item quadratus esset, soluta fuisset quæstio. Proinde quæro unde 96 ille numerus ortus fuerit. Nimirum summa is est trium numerorum, quorum quiuis auctus unitate, cubus fieret. Ita eò res redit, ut tres numeros inuenire iu

bear, quorum quilibet unitate adſcita cubus fiat: ea tamen lege, ut ſumma eorum numerorum ſit numerus quadratus. Ponatur latus primi cubi 1 N † 1, ſecũdi 2 N—1, tertij 2. Cubi fiunt 1 C † 3 Q † 3 N, 6 Q † 8——1 C——12 N, & 8. Ab horum unoquoque abijcio 1, & pono primum de his q quæruntur numerũ 1 C † 3 Q † 3 N, ſecundũ 6 Q † 7——1 C——6 N, tertium 7. Reliquum eſt ut ſumma eorum ſit quadratus numerus. Eſt autem ea 9 Q † 16——9 N, quod æquatur quadrato lateris 3 N——4. & fit 1 N, 2. Erunt ergo quæſiti 1538, primus 8577, & 7. Iam redeo ad id quod initio erat propoſitum, & denuò ſummam ſtatuo 1 N, & fiunt 43740 N. & alius 1538 C, primus 8577 C, tertius 7 C. Rurſus ſtatuimus ſummam eorum 1 N. fiunt 43740 C æquales 1 N, & omnium decimaquinta pars, ac charactetes per N deminuantur. fiunt 2991 Q æquales 225. & $\frac{876}{15}$. ad poſita, & manet.

X Y L A N D R I.

*Ipſa quæſtio in Græco eſt turpiter deprauata: nedum reliqua ſibi conſtent. Atq; propoſitionẽ quidem nos inter uertendum caſtigauimus. cùm autem & elegans ſit & ſubtile problema, libet id explicare. Callidè ſummam numerorum 1 N poſuit autor, cuius cubus ſit 1 C. & ipſi numeri charactere C inſigniuntur, additis minimorum cuborũ numeris unitate mulctatis. ut ſint 7 C, 26 C, & 63 C. ita enim ſumma cubo, 1 C, ſingulis addito, fiunt 8 C, 27 C, 64 C, omnes cubi, quorum latera notum eſt eſſe 2 N, 3 N, 4 N. Plures ſolutiones admittere problema uides, quia alijs etiam cubicis numeris licebat eodem pacto uti. minimis autor ſuo more & conſulto ſe contineet. Summa numerorum ſic poſitorum fit 96 C. & ponebatur 1 N. hæc ergo æquantur, & characteribus depreſſis 96 Q ſiunt 1. Ergo 1 N eſt 96. Sed ſurdos noſter, ut alibi monuimus, miro artificio euitat. Si 7. 26, 63, qui ſunt cubi unitate quiuis multati, ſummam conficerent quadrato numero expreſſam, res confecta eſſet. Ergo alij cubi ſunt inueniendi, quorũ unitate quouis mulctato ſumma numerorum quadratum habeat. Latera cuborum cur ponantur 1 N † 1, 2—1 N, & 2, non eſt obſcurum. hoc enim agitur ut 1 C & —1 C ſe mutuo aboleant. Eſt enim falſum, quòd ſecundum latus poni Græca iubent 2 N—1. quod expoſita in rudiorum gratiam re docebimus.*

| | | |
|---|---|---|
| 1 N † 1 | 2 N——1 | 2——1 N |
| 1 N † 1 | 2 N——1 | 2——1 N |
| † 1 N † 1 | ——2 N † 1 | ——2 N † 1 Q |
| 1 Q † 1 N | 4 Q——2 N | 4——2 N |
| 1 Q † 2 N † 1 | 4 Q——4 N † 1 | 4—4 N † 1 Q |
| 1 N † 1 | 2 N——1 | 2——1 N |
| † 1 Q † 2 N † 1 | ——4 Q † 4 N—1 | ——4 N † 4 Q—1 C |
| 1 C † 2 Q † 1 N | 8 C—8 Q † 2 N | 8——8 N † 2 Q |
| 1 C † 3 Q † 3 N † 1 | 8 C—12 Q † 6 N—1 | 8—12 N † 6 Q—1 C |
| *Primi cubus.* | *Cubus huc nihil faciens.* | *Cubus ad inſtitutũ noſtrũ commodiſſimus, &* |

*in ipſis uerbis autoris ſuperſtet, primo loco integer, pòſt corruptus. Binarij cubum eſſe 8 nemo neſcit. huic adde 1 C † 3 Q † 3 N † 1, & 8 † 6 Q—1 C—12 N, ſumma conficietur 9 Q—9 N † 17. Cæterùm aliter paulo res habet, quàm præ ſe ferat. Non enim cuborum ſumma, ſed unitate deminutorum cuborum ſumma quadrato æquari debet. addamus ergo hæc, 1 C † 3 Q † 3 N. 6 Q † 7——1 C——12 N, & 7. conficietur ſumma 9 Q——9 N † 14. (quod idem fiebat ternario de cuborum ſumma reſecto.) Huic demum quadratum æquabimus 9 Q † 16——24 N, à latere 3 N——4 ortum cuius inſtituẽdi ratio ſæpiùs iam eſt à nobis explicata. fiet itaq; 1 N, † $\frac{2}{15}$. Erunt ergo cuborum latera $\frac{17}{15}$. $\frac{28}{15}$. $\frac{30}{15}$. Cubi $\frac{4913}{3375}$ $\frac{21952}{3375}$ $\frac{27000}{3375}$. Horum ſumma $\frac{53865}{3375}$. communis menſura eſt 15, per quem diuidi numeratorem liquet perito, cum characterum ſumma ſit ternario diuidua, & ultimus quinarius numerator cubus à 15 ortus, utiq; eo diuidi poteſt. Eſt ergo ſumma $\frac{3591}{225}$, hoc eſt (nam rurſum communis menſura 9, quòd item characterum etiam ſumma docet) $\frac{399}{25}$. hinc aufer ternarium ($\frac{75}{25}$) reſtabit $\frac{324}{25}$, utiq; quadratus numerus. Ad rem. Mutilemus cuborum inuentorum quenque unitate, & ſtatuamus eos quos quærimus*

1538

*$\frac{1538}{3375}$ $\frac{18577}{3375}$ $\frac{23625}{3375}$. addito ſingulis charactere C. & ſtatuamus ſummam omnium eſſe 1 N. Atqui eſt $\frac{324}{25}$ C, ut iam docuimus. Ergo $\frac{324}{25}$ Q æquantur 1. Ergo 1 N eſt $\frac{18}{5}$. Reſoluamus nunc hypotheſes. 1 Q erit $\frac{324}{25}$, 1 C autem $\frac{5832}{125}$. per hunc multiplicabimus tres poſitos à nobis, habebimus $\frac{8969616}{421875}$ $\frac{108341064}{421875}$ $\frac{137781000}{421875}$. Iam cubum ſummæ eorum ita inuentorum oportebit itidem eſſe 1 C, cùm ſumma ſit 1 N. Addere ergo $\frac{5832}{125}$ oportebit ſingulis, ut uideamus an fiat cubus ubiq́. Et cùm denominatorem poſitionum communem, eſſe cubum cõſtet, natũ ex multiplicatione cubi 125 in cubum 3375, per quartam noni Euclidis: de numeratorib. agendum eſt. Scilicet multiplicabimus 5832 per 3375, ut eadem denominatio ſummæ, & quæſitorum numerorum fiat (neq; enim heic de cõmuni menſura cogitabit, qui naturas numerorũ & cõpendia nouit.) Numerator cubi ſummæ erit 19683000. Cui addemus hypotheſeon numeratores, fient 28652616 prima ſumma, cubus, cuius latus 306. ſecunda 128024064, cubus lateris 504. Tertia 157464000, cubus lateris 540. Eſt ergo ſatisfactum huic quoq; problemati, quod cùm & inter numerorum miracula meritò referatur, neq; postremum locum mereatur, eruendum, neq; in eo ulli parcendum labori aut ſuperſedendum moleſtia duxi.*

XIX. Inuenito tres numeros, ut cubus ſummæ eorum quouis ipſorũ detracto, cubum relinquat. Statuatur ſumma 1 N. ipſi rurſus 7 C, 26 C, 63 C. ſupereſt ut æquentur coniuncti 1 Numero. & fit 80 C æqualis 1 N. depreſsisq; characteribus 80 Q æquantur 1. Eſt aũt 1 quadratus. Oportebat autem etiam numerum cui nota Q adeſt, eſſe quadratũ. Vnde ergo is eſt natus? quòd à ternario ſubducti ſunt tres cubi, quorum quilibet minor quàm unitas. Inueniendi ergo ſunt tres cubi, quorũ quiuis ab unitate ſuperetur, ſumma autem ipſorũ à ternario ſublata, relinquatur quadratum. & quia uolumus cuborum quemq; minorem eſſe unitate * ſi ergo ſtatuamus tres illos numeros unitate minores, multo minores ſinguli erunt unitate. itaq; quadratum, qui relinquetur, oportebit maiorem eſſe quàm eſt 1 Q. atque hoc ſtatuamus. Oportet igitur tria diuidere in cubos, & eorum multiplicia ſecundum quoſdam cubos diuiſos. Eſto autem ſecundum 216. Oportet igitur 162 in tres cubos diuidere. At 162 componitur ex cubo 125, & duorum cuborum interuallo, qui ſunt 27 & 64. Habemus uerò in poriſmatis hoc, omnium duorum cuborum interuallum eſſe cubum. Recurramus ad propoſitum initiò, & ponamus quemuis cuborum inuentorum: ſummam autem 1 N. ita fiet ut ex tribus cubis conflatus, detracto ipſorũ quolibet, cubum relinquat. Reſtat ut tres illi æquentur 1 N. fiunt autem tres illi cubi $2\frac{1}{4}$. quod æquatur cum 1 N, & 1 N fit 2. ad hypoſtaſes.

## XYLANDRI.

*Expreßi qua debui & potui fide quidquid in Græco repperi. quale autem ſit, non eſt in operto. Ego ſanè nihil iſtorum intelligo, neq; uacat, ut maximè libéret, operam ludere. Si propoſitum eſt tres numeros inuenire, quorum ſumma cubus quocũq; ipſorum multatus, cubum relinquat: ipſi certè non poterunt tales poni, quales in hypoſtaſibus indicantur. Sanè ſequens problema uidetur oſtendere, heic id, quod diximus proponi, & ueſtigia etiam in ijs quæ conuertimus iſtius propoſiti ſunt reliqua. at profectò inſanus ſit, qui credat 1 C —— 7 C eſſe cubum. Vnde uerò illa trium cuborum, quorum quiuis unitate ſit minor, à ternario ſubtractio? unde nobis 162? cur ita diuidendus? Quid hoc poriſmatis, aut unde πειρισμένων, interuallum cuborũ cubum eſſe? ſentio 27 de 64 detractis, reſtare 37, qui ad 125 additus 162 faciat. unde & quorſum, non doceor. Itaq; diuinare non poſſum neq; de ſolutione, neq; de methodo, neq; omnino de ſententia huius quæſtionis: nullis ueſtigijs extantibus, & his quæ dantur, inter ſe (ut uera maximè eſſent) non cohærentibus. Libet interim propoſitionem, qualem accepimus, tentare. Si ſumma numerorũ ponatur 1 N, cubus eius erit 1 C. de hoc ſubtrahere tres numeros, ut reſidua ſint cubi, eſt mediocris opera. Si ab unitate auferas ſeorſim $\frac{7}{8}$. $\frac{26}{27}$. $\frac{63}{64}$. relinquentur $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{27}$. $\frac{1}{64}$. cubi nimirum. Hac ergo charactere C afficiantur, & ſint hypoſtaſes $\frac{7}{8}$ C, $\frac{26}{27}$ C, $\frac{63}{64}$ C, ſumma omnium 1 N, eius cubus 1 C, à quo detractis ſingulis relinquantur cubi $\frac{1}{8}$ C, $\frac{1}{27}$ C, $\frac{1}{64}$ C. Summa numerorum $\frac{4877}{1728}$ C æqualis 1 N. Ergo ſi illa ſumma fuiſſet quadrata, eius latus quid 1 N eſſet docuiſſet. Atq; heic ſanè imitari artificium ſuperioris problematis non licet: & autoris inuentum librarius interuertit. Id quidem deprehendimus, cuborum ſummam à ternario detractam, debere relinquere quadratum, ut ſi, uerbi gratia, à 10*

*m 2 auferas*

*auferas 5.6.7. relinquuntur 5.4.3. summa residuorum 12. tantum etiã relinquitur, si summam prius subtractorum, 18 de 30 auferas. Ad porisma quod attinet, in promtu est emendatio. Etenim duorum quorumcunq; cuborum interuallum, ordine contiguorum, à summa ipsorum subtractum, relinquit duplum cubi ordine illos proximè antecedentis. quod exemplo monstrare libet.*

Cuborum interualla duorum proximorum qualia.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Summa.* | 9. | 35. | 91. | 189. | 341. | 559. | 855. | 1241. | 1729. | 2131. | 3059, | | &c. |
| *Cubi.* | 1. | 8. | 27. | 64. | 125. | 216. | 341. | 512. | 729. | 1000. | 1331. | 1725, | &c. |
| *Interualla.* | 7. | 19. | 37. | 61. | 91. | 127. | 169. | 217. | 271. | 331. | 397. | | &c. |
| *Residua.* | 2. | 16. | 54. | 128. | 250. | 432. | 686. | 1024. | 1458. | 2000. | 2662, | | &c. |
| *Semisses, cubi & ipsi.* | 1. | 8. | 27. | 64. | 125. | 216. | 343. | 512. | 729. | 1000. | 1331, | | &c. |

*Eadem est quadratorum ratio.*

XX. Inueniantur tres numeri, de quorum unoquouis detracto summæ ipsorum cubo, relinquatur semper cubus. Summa rursum sit 1 N. ipsi 2 C, 9 C, 28 C. summa horum 39 C, quod æquatur 1 N. ergo 39 Q æquantur unitati. Quod si fuissent 39 Q conflatum ex 3 C & 3*. Inueniendi sunt ergo 3 C, quorum summæ addito 3 fiat quadratum. Sit primi latus 1 N, secundi 3 —— 1 N, tertij unitates. ac sit 1. Summa trium cuborum 9 Q † 28. & additis 3, fit 9 Q † 31 —— 27 N. hoc æquetur quadrato lateris 3 N —7 N. & fit 1 N, $\frac{1}{7}$, alterius 9. reliqui 1. addo 1 cuiuis istorum cuborũ, & uenio ad propositum initio. Statuo quemuis cubum tantum, posito omnium summam esse 1 N. restat ut hi tres iuncti æquent 1 N. summa ipsorum 2 $\frac{1}{3}$, æqualis 1 N. fit 1 N 3 $\frac{1}{2}$. ad positiones.

XXI. Inueniantur tres numeri æquales, ut qui fit à composito ex tribus cubis, quouis illorum adiecto fiat quadratus. Sit compositus è tribus, ut sit quadratus, 1 Q. & eorum qui quæruntur, unus 3 C, alter 8 C, alter 15 C. & contingit, ut qui fit à cõposito ex tribus cubis, quouis eorum adiecto sit quadratus. Restat ut hi tres æquentur 1 Q. at sunt 26 C. ergo 26 C æquantur 1 Q. & depressis characteribus, 26 Q Q æquantur unitati. Habet autem unitas latus quadratum. ergo etiam 26 Q Q quadratus sit oportet. At multitudo ista Q Q. è tribus conflata est numeris, quorum quiuis unitate adiecta sit quadratus. Porrò compositus ex tribus, quadratus sit, latus habens quadratum. Esto unus quæsitorum, 1 Q Q —— 2 Q, secundus 1 Q † 2 N, tertius 1 Q —— 2 N. & quiuis horũ adscita unitate fit quadratus ac præterea tres hi compositi, in summa quadratum exhibent. Ita in numeris infinitis soluta est quæstio. Ponatur numerus trium unitatum. Esto unus quæsitorum 63, alter 15, tertius 3. Recurramus ad initio propositum, & statuamus summam trium horum 1 Q. ipsorum primum 63 C C, secundum 15 C C, tertium 3 C C. Restat ut eorum summam æquemus uni Q. Ergo 81 C C æquantur 1 Q. & 1 N est 3. reliqua sunt euidentia.

XYLANDRI.

*Cubocubus, κυβόκυβος, non est (ut alij) Diophanto cubus de cubo, quales sunt 512, 19683, 260144. sed quadratus cubi, quem Zensicubum dicunt, ut 64, 729, 4096 Ita etiam initio operis. Itaq; cum C C noster numero 6, Q autem 2 notetur, minore de maiore detracto, 4 relinquitur, quo notatur Q Q. ita 81 Q Q æquantur unitati. & 3 est latus quadrati 9, cuius quadratũ 81. Magis ergo de solutione constat nimirum, quàm de ipsa quæstione. Cur enim tres numeri debent esse æquales? Quin pro C legendum sit C C, uel æquatio inter 26 Q Q & 1 Q, eiusq; deminutio ostendunt. Enimuerò re accuratè considerata, hoc inuenio flagitari, ut tres numeri dentur, quorũ summã oporteat esse quadratã: sed eiusdem summa cubum singulis adiectũ, quadratũ efficere numerũ. Non abs re fuerit annotata ad quintã tertij suprà, recordari. Summa quidẽ quadratũ debere esse, æquatio primo loco oblata significat. Callidè aũt pro numeris istis inueniendis*

*niendis usurpauit 1 Q Q —— 2 Q. 1 Q † 2 N. 1 Q —— 3 N. Nam summa omnium est 1 Q Q. quadratus utiq. & unitas singulis adiecta, quadratos ab 1 Q —— 1, 1 N † 1, & 1 N —— 1, conficit. Arbitraria autem est harum positionum resolutio, itaque Numerum tribus unitatibus cum Diophanto censemus, ut in minimis rem conficiamus. nam binarium 1 Q —— 2 N non admittit: fieret enim 4 —— 4. hoc est, nihil. 1 Q Q est 81, aufer 18, habes 63. adde 2 N, nempe 6 ad 9, habes 15. deme 6 de 9: restant 3. Ergo hi numeri seruient positionibus, 63, 15, 3. Si summam omnium posuisses 1 N, eius cubus esset 1 C. poneres ipsos 3 C, 8 C, 15 C. fient 26 C aquales 1 N, uel 26 Q unitati. Inde uides rursum, quadratum debere esse summa numerum. ac sit 1 Q. eius cubus ergo erit, Diophanteo more, 1 C C, nobis sexta (Numero pro prima accepto) quantitas Q C. Et cum 1 C C sit addendus singulis positionibus, ea erunt 63 C C, 15 C C, 3 C C. quorum summa numerum habet quadratum, 81 C C aquales 1 Q. id est, 81 Q Q aquantur 1. Numeri ergo astimatio est non 3, sed $\frac{1}{3}$. Ergo 1 C C Diophanteus erit $\frac{1}{729}$. & 1 Q erit $\frac{1}{9}$. Primus quasitorum $\frac{63}{729}$ (hoc est $\frac{7}{81}$) quibus si addas summa omnium cubum, hoc est $\frac{1}{729}$, habes quadratum $\frac{64}{729}$. Secundus $\frac{15}{729}$ (siue $\frac{5}{243}$.) cui addito summa cubo, fit $\frac{16}{729}$, quadratus. Tertius $\frac{3}{729}$ (hoc est $\frac{1}{243}$.) addito summo cubo fit $\frac{4}{729}$, quadratus utique. Iam 63. 15. 3. summam faciunt 81. ergo inuentorum summa $\frac{81}{729}$ siue $\frac{1}{9}$, quadratus est numerus, & 1 Q respondet. Nihil ergo in huius problematis demonstratione non ritè est explicatum. Component autem hoc loco, & in similibus, non aliud quàm in unam summam colligi significat. & pro τριῶν κύβων, legendum κύβος. Catera emendentur ex nostris. Reprehendatur nunc antegressum proximè problema, quod miserrimè deprauatum quasi pro deplorato reliqueramus. Dandi sunt tres numeri, quorum summa cubum si à singulis auferam, semper relinquatur cubus. Summa sit 1 N. ergo 1 C erit auferendus de singulis positionibus, ut cubi relinquantur. Ea sunt 2 C, 9 C, 28 C. residua cubi 1 C, 8 C, 27 C. Summa positionum 39 C aqualis 1 N, hoc est 39 Q aquantur unitati. Heic quoque uidere licet, summam positionum numero quadrato oportere concipi, aliàs enim exitus solutioni quastionis non datur. Hinc ergo nascitur istud lemma, quarendos tres cubos, quorum summa ternario aucta, quadratum exhibeat numerum. Latera 1 N, 3 —— 1 N (nam binarius, ut monui, est suspectus. & —— 1 N sumitur, ut in cubo sit —— 1 C, & 1 C ita aboleatur) & 1. Cubi 1 C, 9 Q —— 1 C —— 27 N † 27. 1. Summa omnium 9 Q † 28 —— 27 N. adde 3, habes 9 Q † 31 —— 27 N. quadrato aquale. cuius latus ita fingendũ esse abundè constat, ut 9 Q abolitis, inter unitates & N fiat aquatio. Variè institui latus hoc posse, satis est iam notum: nempe 3 N —— aliquot unitatibus. nam illud ἀριθμῶν γ̄ λεῖψει ἀριθμῶν ζ, falsum est. & μονάδων pro ἀριθμῶν reponendum. notã ζ retineamus. Esto latus 3 N —— 7. quadratum 9 Q † 49 —— 42 N aquale 9 Q † 31 —— 27 N. denique 15 N aquantur 18. & 1 N est $\frac{6}{5}$. Latera itaq. cuborum sunt $\frac{6}{5}$. $\frac{9}{5}$. $\frac{5}{5}$. Cubi $\frac{216}{125}$ $\frac{729}{125}$ $\frac{125}{125}$ His ita utemur, ut unitatem cuique addamus, & signum Cubi. erunt $\frac{341}{125}$ $\frac{854}{125}$ $\frac{250}{125}$ C. summa 1 N. eius cubus 1 C à singulis subtractus, relinquet scilicet cubos $\frac{216}{125}$ C. $\frac{729}{125}$ C. $\frac{125}{125}$ C. Sed uidendum est de summa positionum. Ea est $\frac{1445}{125}$. hoc est $\frac{289}{25}$, quadratus lateris $\frac{17}{5}$. ergo cum $\frac{289}{25}$ C aquentur 1 N, aquabitur $\frac{289}{25}$ Q cum unitate. & 1 N erit $\frac{17}{5}$. summa trium qui quaruntur numerorum. Resolutionem & examen positionum tibi relinquo. deprahendes omnia congruere.*

Præcedentis problematis explicatio.

XXII. Inueniantur tres numeri quadrato æquales, ut qui fit à summa eorum cubus, singulis seorsim detractis, quadratum relinquat. Rursum nobis binarius est diuidendus, ut & antè. est autem eius cubus 8. oportet ergo ab 8 unumquenq; detrahere & facere quadratum. oportet igitur 28 diuidere in tres quadratos, quorũ quiuis maior sit quàm 6. & si ab 8 quemuis horum detrahamus, inueniemus tres quæsitos numeros. Est autem hoc iam antè ostẽsum, quomodo oporteat 26 diuidere in tres quadratos, qui singuli senario sint maiores.

XYLANDRI.

*Propositionem integram extuli. Catera ad uerbũ. quid multis? nõ intelligo. Sed experiamur aliquid tamen. Summa sit 1 Q (nã heic planè dicitur, quòd suprà in opere deprahendebatur, & proxima propositione mutilatum fuerat.) Eius cubus 1 C C Diophanticus. Si decimanona solutionem haberemus, etiam hanc solueremus utiq. Interim amplius.*

XXIII. Partem datam diuidere in tres alias, quarũ quæuis detracto cubo summæ, relin-

mæ, relinquat quadratum. Sit pars data, 4. & hic numerus ita sit diuidendus ut imperatum est. oportebit itaq; quamuis earum subtractis 64 quadratum facere. tres ergo hæ ——3 faciunt tres quadratos. & si cuiuis quadratorum adijciamus 64, inueniemus unumquemq; quæsitorum. Id autem facilè est. Eò enim res deducitur, ut 13 diuidamus in tres quadratos. quod est facilè.

XYLANDRI.

*Quadrâtem puto, $\frac{1}{4}$ diuidi debere in tres partes, ut $\frac{1}{64}$ de quauis subtracto, residua sint quadrata. sed quid diuisio numeri 13 huc pertineat, non uideo. Amplius.*

XXIV. Inueniendi sunt tres quadrati, ut qui ex his fit solidus, quouis ipsorũ adscito fiat quadratus. sit solidus ille 1 Q. & quærantur tres quadrati, quorum quilibet unitate adscita fiat quadratus. Peri hoc potest è quouis triangulo rectangulo. Expo* no tria triangula rectangula, & accipiens ab uno Quadratorum, diuido eum qui est à reliquo rectorum. & inueniemus quadratos, unum 9 Q, alterum 25 Q, tertium 64 N. quorum quiuis cum 1 Q facit quadratum. Restat ut solidum qui ex tribus fit, æquemus cum 1 Q. is autem solidus est 14400 CC. æqualis 1 Q. omnib. sub eandem denominationem deuocatis, & characteribus deminutis, fiunt 14400 Q Q æquales unitati. Est autem unitas quadratus. quòd si etiam 120 Q esset quadratus, soluta esset quæstio. non est autem. Eò itaque res est deducta, ut inueniẽdi sint tres trianguli rectanguli, ut ex tribus singulatim ijsdem solidus multiplicatus in solidũ qui ex basibus eorum fit, faciat quadratum, cuius latus sit numerus multiplicatione ortus laterum quæ circa rectum sunt unius rectangulorum. Et si omnia diuiserimus per numerum ortum ex multiplicatione laterum quæ sunt circa rectum rectanguli inuẽti, fiet q ex multiplicatione rectum continentium eius qui AD in eum qui est iuxta rectum alterius triangulorum & si ex ijs constituamus factum γ ἀ[illegible]: deuen-
* tũ eò est ut inueniant̃ duo trianguli rectãguli, ut qui sub ijs quæ circa rectũ eius qui sub ijs quæ circa rectum erat 12 N: itaque etiam area 12. Si autem 12, & 3. Hoc aũt facile, estq; simile triangulo 79, 40, 45. alterum 5, 12, 13. Cùm habeamus ergo tria triangula rectangula, reuertimur ad prim ò propositum. statuimus trium quadratorum unum 9, alterum 25, alterum 81. & si solidum ex his æquemus 1 Q, existet numerus uerus. ad positiones.

XXV. Inuenire tres quadratos, ut solidus qui ex ijs fit, singulo ipsorum detracto maneat quadratus. Statuatur solidus iste 1 Q. & rursum tres quadrati qui quærantur, sumantur ex triangulis rectangulis, unius 16, alterius 25, tertij 64 Hos coniungo Quadrato, & manet 1 Q—quouis ipsorum, quadratus. Superest ut solidum ex his tribus compositum, æquemus 1 Q. Is autem solidus est 25600 CC. denominatus à parte 122.1025. hæc æquantur 1 Q. omnia numero notæ Q denominantur. erunt 25600 Q Q sub nomine partis 122.1025. æquales unitati. Est autẽ unitas quadratus, & habet latus suum. Ergo oportebat etiam 25600 sub nomine partis 122,1025, esse quadratum. Itaq; res eò est deducta denuò, ut inueniamus tria triangula rectangula ea lege, ut qui fit è perpendicularib. solidus multiplicatus in solidũ qui fit è subtẽsis, quadratũ faciat, qui latus habeat quadratum. & si omnia diuidamus per numerum subtensæ & perpendicularis rectangulorum: oportebit eum qui fit à subtensis
* & perpendiculari subtensæ & catheti mulriplicatum per subtensæ & perpendicularis euiusdam rectanguli. Sit unum triangulorum 3. 4. 5. Eò itaq; deuentũ est, ut duo rectangula triangula inueniantur, ut subtensæ & perpendicularis subtensæ sit 20. illa uerò 20 & 5. & est facile. quippe maius erit 5. 12. 13. minus 3. 4. 5. Ab his ergo quærẽda sunt alia duo, ut subtensę & perpendicularis sit 6. Est aũt maioris quidem subten-
*aliàs 6. sa * 6 $\frac{1}{2}$. perpendicularis 60. Minoris, qui est in subtensa, 2 $\frac{4}{2}$. qui uerò in [illegible] rectangulorum, 12. & accipientes minima similium, recurrimus ad initiò propositũ. & ponimus solidũ qui fit è tribus, 1 Q. ipsorum aũt quadratorũ unũ 16, alterũ 576, tertiũ 2 * Q, sub denominatiõe partis 28561. Superest ut solidus ille æquetur 1 Q. omnia deminutis characteribus, latusq; lateri. inuenitur numerus 65. ad positiones.

XXVI. Inuenire tres quadratos, ut q ex ijs fit [solidus] à quouis ipsorũ detract⁹, relinquat quadratũ. Solid⁹ iste rursus statuat̃ 1 Q: ipsi aũt à qbuscũq; petant̃ rectãgulis.

Atque

Atq; rursum etiam heic eò res deuoluitur, ad ea quæ præcedente fuerunt quæsita problemate. Sic igitur in hac iisdem utimur triangulis, ponimusq; eorum qui quæruntur quadratorum unum 25 Q, alterum 1 Q, tertium 625. alium 4784. & rursum manet solido qui ex tribus componitur sublato à quouis latere quadrati. superest *
ut solidus ille æquetur 1 Q. unde inuenitur numerus maior quàm 8, & manet.

XXVII. Inuenire tres quadratos, ut qui fit à duobus quibusuis, unitate adsumta sit quadratus. Et quoniam quæro, ut qui a primo in secundum fit, addita unitate sit quadratus: omnia in tertium qui est quadratus: itaq; oportebit eum qui est è primo *
in secundum, id est solidum ex tribus cũ tertio facere, ut etiam cum primo & secundo. Id enim antè demõstrauimus. itaq; etiam illi numeri satisfaciũt huic quæstioni.

XXIIX. Inuenire tres quadratos, ut qui fit à duobus quibusuis, * detracto 1 Q sit quadratus. Omnia in tertium. itaq; quod fit è primo in secundum, in tertiũ: hoc est solidus qui fit ex tribus, detracto tertio facit quadratũ. Ergo etiã utroq;, tam primo quàm secundo detracto, solidus è tribus confectus erit quadratus. Hoc autẽ suprà est demonstratum. Illi igitur numeri hoc quoq; præstant.

* uel detractus ab.

XXIX. Inuenire tres quadratos, ut qui è quibusuis duob. fit, ab unitate ablatus, quadratum relinquat. Rursus quęrentes eum qui è duob. quibusuis fit, sublatum ab unitate, facere quadratum: si omnia ducamus in tertiũ, rursum eò deducimur, ut inueniri debeant tres numeri, è quib. confectus solidus si tollatur à quouis, relinquat quadratum. Hoc autem suprà est demonstratum.

XXX. Dato numero, tres alios inuenire quadratos, quorum bini quiq; eo adscito quadratũ faciant. Sit datus 12. & unus quæsitorũ, 9. Quærendi ergo sunt alij duo, ut uterq; eorum cum 24 faciat quadratum, & coniuncti ijdem cum 15 faciant quadratum. Quærendi sunt ergo quadrati duo, quorum uterq; cum 24 faciat quadratum. Sumimus eos qui metiuntur 24, & trianguli rectanguli latera rectum angulũ facientia. sit secundum N 3, oppositus N 8. simul iuncti ambo fiunt $1\frac{1}{2}$ N, & 4 N. Sit unius latus à differentibus 2 N & 3 N. & manet uterq; ipsorum cum 24 faciẽs quadratum. Restat ut ambo iuncti, adiectis 15 quadratum faciant. Fit autem $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$ Q. Ergo 25 Q —— 9 æquantur quadrato, æquales 25 Q. & fit Numerus $\frac{1}{8}$.5. ad positiones.

XXXI. Dato numero, tres alios inuenire quadratos, ut bini coniuncti, de summa sublato dato, faciant quadratum. Esto datus 12. Rursum ponatur quadratorũ quæsitorum unus 25. Vterq; horum cum 12 faciat quadratum: & ambo iuncti, detractis 16, faciant quadratum. Rursum sumimus dimensionem per numeros 3 & 4. Fit primi la- *
tus à differentia 1 N & 2 N. alterius à differentia 2 N & $1\frac{1}{2}$ N. & manet utriusq; horum quadratus, ut faciat cum 2 quadratum. Restat ut summa duorum —— 13, faciat quadratum. fit autem 6.4. Q —— 25 N Quadrat. Esto N, 6.4. & fit 1 N, 2. ad positiones.

XXXII. Inueniantur tres quadrati, ut qui componitur ex eorum quadratis faciat quadratum. Quæsitorum statuatur unus 1 Q, alter 4 Q, alter 9. & fit compositus ex eorum quadratis, 1 Q Q † 27 æqualia quadrato lateris 1 Q —— 1: & relinquuntur 20 Q æquales 3. & si uterq; esset quadratus, soluta erat quæstio. Eò itaq; res redit, ut quærantur duo quadrati, & numerus quidam, ut qui ab ijs fit quadratus detractis quadratis quæsitorum, numerum faciat, qui ad duplum principio positi numeri eam habeat rationem, quæ est quadrati numeri ad quadratum. Ponantur quæsiti quadrati unus 1 Q, alter 4. & ab hoc quadratus si amittat illorum quadratos, relinquit 8 Q. & uolumus hæc ad 2 Q 1, unitates 4, hoc est ad 2 Q † 8 proportionem habere quæ est quadrati ad quadratum. Semisses sumantur omnium, ut etiam 4 Q ad 1 Q † 4 N rationem quadrati numeri ad quadratum habeant numerum. sunt autem 4 Q quadratus. Ergo & 1 Q † 4 æquantur quadrato lateris 1 N † 1. ergo 1 N, $1\frac{1}{2}$. Erit quæsitorum quadratorum alter $2\frac{1}{4}$, alter 4, alter oblatus $6\frac{1}{4}$. omnia quater. erunt unus 9, alter 16, oblatus autem 25. Recurramus ad initiò positum. Statuamus triũ quadratorum unum 1 Q, alterum 9, alterum 16. & fit qui ex eorum quadratis componitur 1 Q † 347. Hæc æquantur quadrato, cuius latus 1 Q —— 25. & 1 N est 12. Reliqua sunt manifesta.

XXXIII. Octodrachmas & quinquedrachmas choas aliquis miscuit, obolis man
dato ut bonũ facerẽt, & preciũ psoluit super omnib. quadratis imperatas accipiens
unitates, & facientẽ rursus aliũ te ferre quadratũ, sumẽtẽ pro latere summã choarũ.
Itaq; distingue, octodrachmas fac, & rursus reliquos puer dic quinquedrachmas.
Epigrammate hoc id significatur. Duos quidã emit cados uini, unius choam drach
mis 8, alterius choam drachmis quinq;: & p omnib. persoluit preciũ, numerũ qua-
dratũ, qui ad 60 faciebat quadratũ, cuius latus numerus erat choarũ. Distingue nũc
quinquedrachmas ab octodrachmis. Esto choarũ multitudo 1 N, ergo preciũ erit 1
Q —— 60, æquale quadrato. cuius latus ponendũ est 1 N —— aliquot omnino uni-
tatibus. Et quoniã 1 Q —— 60, cõstat è duob. numeris, precij scilicet octodrach-
marũ, & precij quinq; drachmarũ.* facit multirudinẽ quinquedrachmarum, & 8 fa
cit multirudinẽ octodrachmarum, & multitudo choarum in summam contracta fa
cit 1 N. oportebit 1 Q —— 60 diuidere iñ duos numeros, ita ut alterius quintans, al-
terius octans, iuncti 1 N conficiant. Atq; hoc nõ planè fieri undiquaq; potest, nisi 1
N statuatur maior octante de 1 Q —— 60, minor autem quintante de 1 Q —— 60.
Esto 1 Q —— 60 maior atq; 5 N, & minor quàm 8 N. Quando itaq; 1 Q —— 60 ma-
ior est quàm 5 N, adijciãtur utrobiq; 60. ita 1 Q maius erit quàm 5 N † 60. ergo etiã 1
* Q † 5 N numeto aliquo amplius sunt quàm 60. & oportebit numerũ maiorẽ esse,
non minorem quàm 11. Rursum quando 1 Q —— 60 minus est quàm 8 N, additis u-
* trinq; 60, 1 Q æquabitur 8 N & cuidam numero qui minor sit quàm 60. Itaq; opor-
tebit numerum inueniri non maiorẽ quàm 13. eundẽ uerò demonstratũ minorem
esse quàm 11 nõ debere. Est ergo inueniendus numerus maior quàm 11, minor quàm
12. Cum aũt quęrimus quadratũ æquale 1 Q —— 60, fingendũ est eius latus 1 N ——
aliquot unitatibus. fitq; is numerus ex aliquo numero in seipsum ducto & aucto u-
nitatib. 60, & diuiso per sui duplũ. Eò itaq; res deducta est, ut inueniendus sit nume-
rus, cuius quadratus si adsciscat 60, & summa per duplũ numeri diuidatur, quotiẽs
* maior sit quàm 11, minor quàm 13. Et si hunc statuamus 1 N, oportet 1 Q —— 60 diui
dere in duos numeros, & quotientem inuenire maiorem quàm 11, minorem quàm
13. Et si quæsitum numerum statuamus 1 N, oportebit 1 Q —— 60 diuidere per
duos numeros, ut maior quàm 11 exeat. Ergo 1 Q † 20 maius erit quàm 22 N. ergo
* 22 N æquantur 1 Q, & qui minorem unitatem 60 erit numerus, non debet esse mi-
nor 19. Rursum oportet 1 Q † 20 diuidere per 2 N, & numerũ inuenire minorẽ 1 Q †
* 80, itaq; 1 Q † 60 minus sunt quàm 20 N. Ergo 26 N qui sunt 1 Q & numero quodã
maiori quàm 60. unde oportet numerũ minorẽ esse quàm 26. sed & maior est atq;
19, maior 20. Ergo oportet quadratũ æquale 1 Q —— 60 parantes, latus statuere 1 N
—— 20. Ita inuenitur 1 N $11\frac{1}{2}$. Quadratus eius $132\frac{1}{4}$. tolle 60, relinquuntur $72\frac{1}{4}$. Hoc
oportet diuidere in duos numeros, quorũ prioris quintans cũ posteriotis (octãte)
faciat $11\frac{1}{2}$. Sit prioris Quintans 1 N. ergo alterius octans erit $11\frac{1}{2}$ —— 1 N. Ipsi ergo e-
runt alter 5 N, alter 92 —— 2 N. hæc æquantur cũ $72\frac{1}{4}$. Erunt ergo 79. ergo multitudo
quinq; drachmarũ choarum 27, octodrachmarum 4, unitates 11. reliqua patent.

# DIOPHANTI ALEXANDRINI RERUM ARITHMETICARUM LIBER SEXTUS.

1 INueniendum est triangulum rectangulũ, cuius ab hypotenusa si subtra-
hatur alterutrum laterũ reliquorum, relinquatur cubus. Esto illud trian-
gulum effictum à duobus numeris, quorum alter 1 N, alter 3. Fit ergo hy-
potenusa 1 Q † 9. perpẽdicularis 6 N. basis 1 Q —— 9. Si alterum latus ab
hypotenusa subtrahatur, puta 1 Q —— 9, relinquentur 18. qui sanè cubus non est.
Vnde autem prouenit 18? Quadratus est de 3 bis sumtus. Inueniendus est ergo nu-
merus, cuius quadrati duplum, sit cubus. Esto is 1 N. erunt 2 Q æqualia cubo alicui.
sit is 8, fit 1 N, 2. Rursus triangulum fingo ab 1 N & non 3, sed binario. ita fit hypote-
nusa 1 Q † 4, cathetus 4 N, basis 1 Q —— 4. Et si hãc ab hypotenusa detrahas, relin-
quitur 8, cubus. Restat ut cathetum ab hypotenusa auferamus. relinquitur 1 Q † 4
—— 4 N, æquale cubo. Est autem hoc quadratum lateris 1 N —— 2. hoc ergo latus æ-
quemus

quemus cubo, & soluemus quæstionem. sit numerus cubicus 8. erit 1 N. 10. Effingetur ergo triangulus à 10 & 2, fietq; hypotenusa 104, cathetus 40, basis 96. & cõstat.

XYLANDRI.

*Nam 40 ab 104 sublatis, cubus restat 64: 96 de 104 ademptis, cubus relinquitur 8. Quadratum basis est 9216, catheti 1600. summa 10816. & tantus est quadratus hypotenusæ. Sanè quæ in Græco sunt menda, difficile non fuit corrigere & quod de ultima æquatione dicitur, certissimũ est nam si quadratus aliquis numerus, cubus est: necesse est etiam latus eius quadrati, cubum esse: & cubi, quadratũ. quod ex natura characterum cossicorum colligere licet: & numero qui Q C nostro additur, 6. nam latus quadrati quærere, est semisse numeri adiecti notatam quantitatem quærere, scilicet 3 hic: quo notatur cubus. Et si latus cubi quæritur, triente numeri notata quantitas quæritur, qui hic triens est 2, quadrati nota. Hæc ergo talia sunt. Sed effictionem illam triangulorum vellem à Diophanto explicatam haberemus. Eam nos huc repetemus ex iis, quæ in explicando superioris libri problemate octauo, & tertij vigesimosecundo docuimus. Effingendus est quadratus ex 1 N, & 3. duplum eius quem multiplicando componunt, est 6 N unum latus. Quadrata 1 Q ac 9, differunt 1 Q —— 9, quod est alterum ipsorum numerorum quadrata coniuncta, ex quibus triangulum effingebamus, hypotenusam sufficere, ex ibi tractatis intelligi potest, magno sanè compendio: cùm per 47 primi Euclidis methodum eam in tali genere numerorum inuenire nequaquam possis. Sed explicemus absolutorum exemplo numerorum. Effingere libet triangulum rectangulum ex 3 & 8. erit unum latus 48, duplũ ex iis compositi. alterum 55, interuallum quadratorum. hypotenusa 73, summa quadratorũ. Et ut videas idem fieri, quod per inuentum Pythagoræ. Quadrata laterum sunt 2304, & 3025. summa 5329. atqui huius radix quadrata est 73. Et semel numerorũ qui effictioni præsunt quadratis cognitis, res citra molestiam conficitur. Sint 3 & 97. latus unum 582. Quadratum de 97 est 9409 ergo alterum 9400, hypotenusa 9418. quod ita habere, experitor si lubet. Idem etiam in fractis experieris. Porrò autem eodem modo ex 1 N & 2 latera orthogonij effinguntur 4 N. 1 Q —— 4. & hypotenusa 1 Q + 4. & in solutione rectangulum à 10 & 2 (non 1, ut in Græco male est μονάδος pro μονάδων β.) effingitur. Bis decem sunt 20, duplũ 40 est unum latus; quadrata 100 & 4. interuallum 96 alterum latus; summa 104, hypotenusa: compendio inuenta. alioqui laterũ quadrati inuenientur 1600, & 9216. summa 10816, cuius latus quadrati est 104. Et quando in hanc rectangulorum inuentionem denuò incidimus: libet hic typum subijcere, aut specimen potiùs typi, unde mirabilis sanè, & à nemine (quod sciam) litteris vulgata progressio huius effictionis possit intelligi: & diametralium (quos vocant) numerorum ingens copia confici, ac immensa potius.*

Effectio triangulorum.

Compendium ad 47. I. Eucl.

*Numeri, è quibus rectanguli effinguntur.*

| | *latera* | *rectum facientia.* | *hypotenusa.* | |
|---|---|---|---|---|
| 2 / 3 | 12 | 5 | 13 | |
| | (4) | (7) | (7) | *In-* |
| 2 / 4 | 16 | 12 | 20 | |
| | (4) | (9) | (9) | *ter-* |
| 2 / 5 | 20 | 21 | 29 | |
| | (4) | (11) | (11) | *ual-* |
| 2 / 6 | 24 | 32 | 40 | |
| | (4) | (13) | (13) | *la.* |
| 2 / 7 | 28 | 45 | 53 | |
| | (4) | (15) | (15) | *&* |
| 2 / 8 | 32 | 60 | 68 | |
| | (4) | (17) | (17) | *cætera.* |
| 2 / 9 | 36 | 77 | 85 | |

*Dato orthogonio, inuenire unde sit effectus diagonali, qua latera 7. 24. 25. 28. 45. 53. &c. 8. 15. 17, &c. Data hypotenusa inuenire latera.*

*Ex hoc cætera tua industria est colligere. Nam si ita disponas 3.4. & 3.5. & 3.6. ac deinceps, inuenies progressionem laterum primorum interuallo. 6. reliquorum iisdem imparibus. ut additione etiam quotlibet diametrales cudere liceat.*

II. Quæ-

II. Quæritur triangulus rectangulus, cuius hypotenusæ alterutrū latus si addatur, cubus cōfiat. Si multiplicemus quod quæritur à duob. N, ut in præcedente: quærendus est numerus quadratus, cuius duplū sit cubus. Eius quadrati latus erit 2. Fingimus igitur triangulū ab 1 N & 2. Et fit similiter hypotenusa 1 Q † 4. laterū reliquorū alterū 4 N, alterū 1 Q — 4. Restat ut latus hypotenusæ alterutro adscito cubum præstet. Sed cū ad primas positiones redierimus, inuenimus 1 Q minus esse quàm 4, & maius quàm 2. minus est unitatib. duabus. & eò redacti sumus, ut quærere oporteat
* cubum minorē quàm 4, maiorē quàm duo. is est 27. & fit 1 N † 2, æqualis numerus
* 27. fit numerus II. Ergo hypotenusa erit 377. laterum alterum 135, alterū $5\frac{1}{2}$. & per 64; erit triangulum contentum lateribus 377, 135, 352. & constat.

XYLANDRI.

*Id quod potißimū est in explicatione huius quæstiōis, mutilatū est, & reliqua uitiata: solutio nulla. Positis trianguli lateribus 4 N, 1 Q — 4, & hypotenusa 1 Q † 4: experiamur quid fiat. Quo aūt ordine erit utendū? Si addatur latus 4 N, ad hypotenusam 1 Q † 4, fiet quadratus 1 Q † 4 N † 4, lateris 1 N † 2. de quo quid esset statuendū, superiore est ostēsum problemate. scilicet æquaremus cū 8 & 1 N fieret 6. latera 24. 40. 32. & sanè 24 cū 40 cubū cōficiunt 64. at 40 & 32 cubū nō cōflāt. Eodē redibit res, si cū alio cubo æquet. puta cū 64. erūt latera 248, 3848, 3840. priora cubū faciunt 4096. posteriora nequaquā. nō ergo hinc ordiendū. At si addas 1 Q — 4 ad 1 Q † 4, cōficies 2 Q. hoc æquabitur etiam cubo. Cubus duplus quadrati nullus est præter 8. ut triplus quadrati nullus extra 27, octuplus quadrati nullus extra 512. quod cosicarū progreßionū rationes demonstrāt. Si 2 Q æquamus 8, 1 Q erit 4; & 1 N, 2. At sic resolutæ laterū positiones erūt 8, 4 — 48. ita scilicet nullū esset tertiū latus trianguli. quod est absurdißimū. Ergo ad prius redeamus & cōparemus 1 N † 2 cū alio quodā cubo, eoq́; minore, & scilicet inter 2 & 4 interposito. qualis in integris est nullus, $\frac{27}{8}$ aūt, qui est $3\frac{1}{8}$ ei cōditioni satisfacit. Nāne in fractu quidē ullū inuenies cubū, qui duplus alicuius quadrati sit: & hypostases saluas esse oportet, quod fieri nō potest si 1 N, binariū, 1 Q quaternionē æquet. Ergo 1 N † 2 æquētur cubo $\frac{27}{8}$. hoc est, 1 N sit $\frac{11}{8}$. & resoluātur hypostases. 1 Q est $\frac{121}{64}$, adde 4, seu $\frac{256}{64}$. habes hypotenusam $\frac{377}{64}$. Itē subtrahe 4 ab 1 Q; fieri hoc nō potest. sed uicißim (ut alibi quoq; monui) $\frac{256}{64}$ à $\frac{121}{64}$ aufer, habes alterum latus $\frac{135}{64}$. deniq; 4 N sunt $\frac{44}{8}$, seu $\frac{352}{64}$ tertiū latus. Cur abiciatur denominator cōmunis in hoc casu, alibi est ostēsum. 377. 135. 352, latera sunt quæ requirebātur. et hypotenusa cū altero laterū cōiuncta 512, cum altero 729 conficit, cubos ab 8, & 9. Subtile est hoc solutionis genus.*

Nota.

III. Inueniatur triangulū rectāgulū, ut areæ eius numerus dato numero auctus cōficiat quadratū. Addēdus sit 5. & triāgulū cōstituatur specie hac, laterū 3 N, 4 N, 5 N. Fit area cū 5, 6 Q † 5, quod æquatur quadrato. Sit 1 N, Q 9. & à similib. auferātur similia, supersunt 3 Q æquales 5. & oportet speciē ad speciē rationē habere quadrati numeri ad quadratū numerū: ita oportebit etiā multitudinē ad multitudinē. Est ergo eò peruētū, ut inueniendū sit triangulū rectangulū, & quadratus numerus, qui detracto numero areæ eius trianguli, præstet quinq; quadratos. Cū datus numerus sit 5, fingamus uni 1 N, & fit areæ numerus 1 Q. sit quadrati latus, 1 N, & tot numeri, quan-
1Q+100 tū est duplū dati numeri, nēpe 10 N. fit quadratus 1 Q † 100 Q † 8. Hoc quintuplice-
+10N mus, & areæ numerum (1 Q.) auferamus: supersunt 101 Q † 20. Hæc quinquies, sunt 505 Q † 190, quadratus. & omnia in 1 Q, fiunt 100 Q † 505 æquales quadrato lateris 10 N † 5. unde inuenitur 1 N esse 24. Ad proposita. Multiplicabitur ergo triangulus à 24 & 5, latus aūt quadrati 163. Si igitur rectangulū statuamus in numeris, & areā eius
* cum 5, faciemus 1 N, Q 8, 5569. & reliqua nobis erunt manifesta

IV. Inueniendū est triangulū rectangulū, ut numerus areæ, sublato eo qui datur, relinquat quadratū. Datur aūt 6. & statuaē triangulū datū specie & ob hypothesin 8 O Q — 6. numerus quadratus esto N Q 30. Et rursus res eò deducitur, ut inueniendū sit triangulū rectangulū, & quadratus numerus, ut si ab area tollatur quadratus, reliqua sexies sumta sint quadrata. Fingamus rursus triangulum ab 1 N & 1. & quadrati latus sit 1 N. & erit semissis multitudinis dati numeri, hoc est 3 N † 3 Q — 10 Q numerus quadratus. hoc sexies, fit 36 Q — 60 æquale quadrato, cuius latus 6 N — 2 unde inuenitur 1 N, 8. Fingitur ergo triangulus ab 8, & fit. quadrati autem 37. & cū inueniam triangulum, constituo in numeris, secutusq́; propositionem, inueniam

numerum

numerum rationalem, & constat.

V. Inuenire triangulum, cuius areæ numerus à dato subtractus, relinquãt quadratum. Datus sit 10. & rursus statuatur triangulum à N 1, N 5. fiunt 10 —— 6 Q æquales quadrato. Et si faciamus N Q quadratis, rursum eò deuenrũ est, ut inueniri debeat triangulum rectangulũ & quadratus numerus, ut quadrarus areæ auctus numero, decem quadratos faciet. Fingatur quadratum ab 1 N & 1. latus autem quadrari 1 N. & 6, & 5. & fit cõpositus ex area & * 26 Q † 10. hæc decies, fiunt 260 Q † 100. & quadrans horum 65 Q † 25 æquarur quadraro lateris 5 N † 8. unde inuenitur 1 N esse 8. ad posita perge, & inuenies ut in præcedentibus.

VI. Inueniatur triangulum rectangulum, ut areæ cum uno laterum quæ rectum faciunt angulum, datum numerũ faciat. Sit datus 7. Sit rursus triangulus datus specie 3 N, 4 N, 5 N. fiunt 6 Q † 3 N æquale 7. Oportebar autem semisse unirarum N in se ducto, additis Q unitatibus facere quadratum. id autem non fit. Oporrebit ergo inuenire triangulum rectangulum, ur qui fit à semissi lateris circa rectum unius adscitis 7 & area, faciat quadratum. Esto * laterum, 1 N. qui in altero, 1. & fiunt N 3. $3\frac{1}{2}$ † 4. omnia quater, fiunt 14 N æquales quadtaro. Vtq; etiam triangulum rectangulum rationalibus lateribus constituamus, oportet N Q 1 † 4 esse quadratum. Excessus fit 1 Q —— 13 N. dimensio 4 N secundum 1 N —— 14. dimidium excessus in se, fiunt 39 æquales minori. & fit 1 N, 24 Ad posita. Pono unum larus trianguli 27. alterum 1. Omnia septies. fir unum 24, alterum 7. & hypotenusa 25. Fit area cum duobus lateribus, 84 Q † 7 N, hæc æquantur 7. Ergo 1 N inuenitur 6. 7, 25, & manet.

VII. Inuenire triangulum rectangulum, cuius ab area si auferatut unum latus rectum angulum facientium, relinquatur datus numerus. Is sit 7. Rursum si triangulũ statuamus data specie, res eò demittitur, ut quæri oporteat triangulũ rectangulũ, ut lateris unius semisse in seipsum ducto, adiecto ei quod fir 7, & area, quadratus exsistat. Et inuentus est 7. 24. 25. Pono itaq; in Numeris, & atea detracto uno laterũ fiũt 84 Q —— 17 N. æqualia 7. fit 1 N 5. ad positiones.

IIX. Inuenire triangulũ rectangulũ, ut area ambob. laterib. quæ sunt circa rectũ angulum adsumtis, datum cõficiat numerum. atq; hic esto 6. Rursum statuatur triangulum datum in specie, & rursum eò deuoluitur res, ut inueniendum sit triangulum rectangulum, ut summæ laterum circa rectum in se multiplicatus semissis cum senario areæ faciat quadratum. Ponamus denuò latus alterum 1 N, alterum 1. fit ut quæramus 4 Q † 17 N † 4, æqualia quadraro Omnia quater fit Q † 4 N † 4, æqualia quadrato, & 1 Q † 1 æqualis. excessus 14 N, mensura 2 N per 7. huius excessus semissis fit 1 Q † $12\frac{1}{4}$ † 7 N, quod æquatur 1 Q † 1. fit 1 N, 45. Erit ergo triangulum 40, 1, 53. & omnia per 28. fit triangulũ 45 N, 28 N, 53 N. & fit area cũ summa duorũ istorũ laterum. 630 Q † 73 N æquale 6. ac Numerus exsistit rationalis. ad proposita. 16. Omnium quadrans reducta.

IX. Inueniatur triangulũ rectangulũ, cuius ab area si duorũ laterũ quę rectũ faciũt angulũ auferatur summa, datũ numerũ exhibeat. is aũt sit 6. Rursus statuemus triangulũ qui quæritur darũ specie. Fit ut quærendũ sit triangulũ rectangulũ, ut summæ dictorũ laterũ semissi in se ducto, ei quod fir si 6 adimas areæ quadratũ fiat. Hoc iam antè est demonstratum, & est 28. 45. 53. Pono itaq; latera in Numeris. fiunt rursus 630 Q —— 73 N æqualia 6. unde inuenitur 1 N, 6. Iam ad posita hoc accommodemus.

X. Inueniamus triangulum rectangulũ, cuius area latere altero & hypotenusa adsumtis, numerũ propositũ exhibeat. Detur 4. Rursus triangulũ illud statuemus datũ in specie. Requirit᷑ pinde, ut triangulũ excogiremus rectangulũ, cuius areæ quadruplũ ad summã hypotenusæ & alterius lateris si adiungatur, huius collecti semissis in se ductus, quadratũ cõficiat. Est aũt demonstratum, latera esse 28. 45. 53. Hæc N notata pono. fiunt 630 Q —— 81 æqualia 4. fitq; 1 N 6. ad positiones, &c.

XI. Inuenito triangulum rectangulum, cuius areæ si addatur hypotenusa & laterum reliquorum unũ, datum numerũ summa repræsentet. Esto is 4. Rursum constituemus triangulũ illũ datũ specie. & reliquũ est, ut indagemus triangulũ rectangulũ, cuius areæ quadruplũ ad summam dictorum laterũ si adijcias, semissis collecti in seipsum multiplicatus Q Q 1, C 4, Q 6, N 4, 1. At iiii, ii, areę 1 Q Q, 12 Q, 8 N. Itaque opor.

quę oportebit quærere 4 Q Q, 8 C, 18 Q, 12 N, 1. æquales quadrato, cuius latus sit 6 N † 1 —— 1 Q. & fit Numerus 4. 5. Fingitur ergo triangulus à 9. & omnia quinquies fingentur. Rursum tertiū unū (al. lectio, ab) 2 & 5. & sumens minorē similium, pono eum in Numeris. fiunt 28 N, 45 N, 53 N. fiunt area cū summa laterū dictorū 630 Q † 81, æquale 4. & 1 N fit 4. ad posita.

XII. Inuenire triangulū rectangulū, ut & qui est in primo ipsum latus, sit quadratus: & præterea qui est areæ, cū minore latere faciat quadratū. Fingatur triangulus 1, 2 N. & supponatur maius latus factū ex duplo eius, quem ipsi multiplicato uno in alterū componūt. Oportet ergo inuenire duos numeros, quotum multiplicatione qui cōponitur, semissis sit quadrati: & excessus dupli huius semissis, supra excessum quadratorū qui ab ijs fiūt, faciat quadratū. Hoc aūt in quibusuis duobus numeris, si maior sit minoris duplus. Restat ut quæramus aream trianguli, cū minore laterū facit quadratum. Fit aūt area huius, $4\frac{1}{2}$, à Q Q qui fit à numero. Itaq; ei ipsum latus ex tribus cū qui fit à minore quadratū. Et omnia per quadratū à minore. Quatenus ergo numerū aliquē, ita ut etiā quadrati qui ab ijs fiunt cū tribus unitatibus faciant quadratū. Est aūt unitas, & alij infiniti numeri. Ergo triangulus quem quærimus, effingetur ab 1 & 2.

XIII. Datis duob. numeris, quorū summa quadratū conficit: infiniti inuenientur quadrati, quotū quilibet multiplicatus in alterum, altero ad productū adiecto quadratū conflet. Numeri sunto 3 & 6. & inueniendus sit quadratus, qui per 3 multiplicetur, productumq; 6 augeatur, atq; ita quadratus fiat. Sit quadratus ille 1 Q † 2 N † 1. fiunt multiplicatione, (& 6 additis) 3 Q † 6 N † 9 æquales quadrato. huiusq; solutiones sunt infinitæ, quia unitates habent latus quadratū. Aequetur sanè quadrato lateris 3 —— 3 N; fit 1 N, 4. latus ergo quadrati erit 5. sed & alij innumeri inueniētur.

XIIII. Inueniatur triangulū rectangulum, cuius area si augeatur utroq; laterum, fiat quadratus. Statuatur triangulū datū in specie 5 N, 12 N, 13 N, fiunt 1 Q † 12 N æquales quadrato. & 10 Q † 5 N æquales quadrato. & æquetur Quadrato 36. fit 1 N, 1. & cùm 1 N sit 2, oportebit ut etiā 1 Q † 5 N sit quadratus. at non est. Itaq; eò compellimur, ut opus sit inueniri quadratū quendam, qui detractis 30, & residuo per 12 diuiso quotientem edat, qui in se ipsum ducatur: & ita 30 sumtus, ubi adiecerit sibi numerum qui fit ab inuento numero, faciat quadratum. Esto qui quæritur ut faciat quadratum, 1 Q, & numerus 12 denominatione partis 1 Q —— 3. Quadratus fit 144 denominatione partis, 1 Q Q —— 60. hæc tricies cū quintāte suo fiunt 60 Q † 4320 sub denominatione partis 1 Q Q —— 60 Q. & est pars quadratus. oportebit ergo 60 Q † 22560 esse quadratum. Est autem 60 ex quadrato quodam cum qui potentia sexagies factum, & auctum unitatibus 22508, & facientem quadratū. Si igitur minorem ipsi rectangulo constituamus 60 cum 22502 facientem quadratū, soluimus quæsitū. Fit autem 60 ex eo quod fit ex laterib. circa rectū, uno in alterum ducto. At 22308 è solido continetur. Ex maiore continentium angulum & alterius excessu & area. Eoq; redit res, ut quærendum sit triangulū rectangulū, ut qui fit ex laterib. rectum facientibus, adscito solido qui componitur ex maiore laterum, horū interuallo, & area, faciat quadratum. Quod si constituamus maius latus quadratū numerū, omnia ad id comparabimus. quæremus minus latus, cū eo quod facit ipse ductus in laterū interuallū, quadratū. Relinquitur, ut inueniamus duos numeros, areæ & interualli laterū, & quæramus quadratū, qui in unū datū multiplicatus quadratum faciat. Hæc aūt lemmata suprà sunt demonstrata. & est rectangulum 3, 4, 5. Statuo id in Numeris, fitq; ut quæramus 6 Q † 4 N æquales quadrato. & 6 Q † 3 N æquales quadrato. & rursum si remittamus maiorem æqualitatem, fit 1 N, 4 in 1 —— 6. ergo Quadratus fit 16 in unitatib. Q Q 1 † 36 —— 12 Q. Erit ergo 6 Q † 3 N, fiunt 12 Q † 24 denominatione partis 1 Q Q † 30 —— 12 Q, 24. debent quadratum qui sæpe in minore datum adsciscens numerum maiorem facit quadratum. Est autem 25. ergo 1 Q fit 25. ergo 1 N erit 5. Quærentes igitur 6 Q † 4 N æquare, facimus æquales Quadratos 25. & fit numerus datus. Erit ergo triangulum 12. 16. 20. & constat.

Inuenire triangulum, ut areæ eius numerus detracta laterū summa quadratum relinquat.

relinquat. Rursum si constituamus, id datũ in specie, ut in præcedente, eò redijt res, ut quæri oporteat triangulũ rectangulũ similẽ huic, 3, 4, 5. Ponatur in Numeris, 3 N, 4 N, 5 N. & 6 Q—4 N æquantur quadrato. Et statuamus hunc minorem quàm 6 Q. uenit 1 N 4, sub ratione partis interualli quod est inter quadratum quendam. & si statuamus quadratũ 1 Q, fit tanto exstante Numero 6 Q Q—3 N facit æqualia quadrato. Et 6 Q † 96 quidẽ sub ratione partis 1 Q Q † 36—12 Q. Interualli aũt fit 12 sub ratione partis 6 Q Q—1 Q, hoc est 72—12 Q eiusdẽ partis sub nomine. Quæ si tollamus à 36 sub eiusdẽ partis ratione: supersunt 12 Q denominatæ à parte 1 Q Q † 36—12 Q. & pars est quadratus. ergo etiã 12 Q † 24 æquatur quadrato. & 1 N, est 1. Statuo 6 Q—4 N æqualia 1 Q. fit 1 N, 4. latera ergo eius qui quæritur trianguli erunt 12, 16, unitates 4. & si nolis uti unitate, statue minori 1 N † 1. itaq; 3 Q † 6 ualebũt 3 Q † 6 N † 9, eaq́; æqualia quadrato facere in procliui est. Et inuenietur N nõ maior quàm 13, * autem, numerus 1 N † 1. Erit itaq; 1 N non tantum 22. & eius quadratus sublatus à 6, rationalem relinquit numerum.

XV. Inueniatur triangulũ rectangulũ, ut numerus areæ tã hypotenusæ quàm alterius lateris numero subtracto, quadratũ relinquat. Sit triangulũ datum specie, 3 N, 4 N, 5 N. Rursum quærẽdũ est 6 Q—5 N æqualia quadrato. & 6 Q—3 æqualia quadrato. Heic quidem 1 N fit 3 sub ratione partis 6—1 Q. atq; hoc inuẽto, 6 Q fiunt 54 sub ratione partis 1 Q Q † 36—12 Q. Et oportet à 54 sub ratione partis 1 Q Q † 36—12 Q. erũt ergo 90—15 Q denominatæ ab eadẽ parte, & reliqua æqualia facere quadrato. restant autem 15 Q—36 Q sub ratione partis 1 Q Q † 36—12 Q. æqualia quadrato. Pars aũt est quadratus. ergo etiã 15 Q—36 quadrato æquãtur. atq; hæc quidẽ imposibilis est æquatio: quia 15 in duos diuiditur quadratos. Nõ omnino aũt impossibile est quod initio erat ꝓpositũ. Oportet igitur determinare de quadrato. Facti sunt enim 15 Q è quodã quadrato minore, quàm quod fit area multiplicata in hypotenusam & unũ laterũ. at 36 quæ desunt ex solido quẽ cõponunt area, unũ latus, & interuallum inter hoc & hypotenusam. Eò itaq; deducta est res, ut priùs oporteat inuenire triangulũ rectangulũ, & quadratũ numerũ minorẽ areæ numero, ut quadratus multiplicatus multã in hypotenusam & unã laterũ, solidas cõtenti ex area & dicto latere, & excessu hypotenusæ supra illud latus factũ esse ex duplo eorũ qui fit ex ipsis. Omnia cõparemus cũ interuallo dicto. Rursus quæremus aliũ quadratum multã in hypotenusam & unũ laterũ, areæ in primã laterũ excessus quadratum. Et si statuamus eos qui triangulũ effingũt similes esse plano: dissoluemus quęstionẽ. Fingatur triangulus à 4 & 1. Quadratus aũt, ut minor sit numero areæ, esto 36, triangulũ uerò effictũ in Numeris statuo 8 N, 15 N, 17 N. & fit numerus areæ, abiecto uno laterũ, 60 Q—8 N. hæc æquãtur 36 Q. fit 1 N, 3. ad posita. fit triangulus 8, 15, 17, & cõstat.

XVI. Si dẽtur duo numeri, & in alterũ eorũ ducatur quadratus, alteroq́; de ꝓducto subtracto relinquatur quadratus: inuenieť etiã alius maior quadratus, quã antè sumtus fuerat, qui hoc idẽ præstet. Sint numeri 3 & 11. Et primùm quadratus aliquis, utpote 25, multipliceť in 3. à ꝓducto subducatur 11, relinquitur 64, quadratus lateris 8. Quæremus aliũ quadratũ, q maior sit quàm 25, & tamen idẽ possit. Latus eius esto 1 N † 5. huius quadratus 1 Q † 10 N † 25. Huius triplũ, demto 11, 3 Q † 30 N † 64 ęquetur quadrato. sit huius latus 8—2 N. Fit 1 N, 62. ergo latus est 67. quadratus 4489. qui postulata facit.

XYLANDRI.

*Erant & hæc deprauata, ut uides, in Græco, ita tamẽ ut corrigi possint de nostra uersione. Est aũt theorema nõ iniucundũ: siue problema malis dicere. Exemplũ quãtum uoles, habebis: semper numero per quadratum multiplicato, & de producto abiectis tot unitatibus, quibus illud quadratum superas, inq́; numerum, qui alter datorum sit, contractis.*

XVII. Inueniamus triangulũ rectangulũ, ut areæ eius numerus tã hypotenusæ quã alterius lateris numero detracto relinquat quadratũ. Hoc triangulũ si statuamus datũ specie, rursum cogimur determinare, & quærere triangulũ rectangulũ, atq; numerũ quadratũ, maiorẽ areæ numero. ut quadratus in hypotenusam multiplicatus & unũ latus quæsiti rectãguli: solidi, qui cõtineť area, dicto latere, & excessu hypotenusæ super istud, quadrati *. Fingať itaq; triangulus ab 4 & 1. quadratus aũt 36. & non Idem cum 15.

est maior numero areæ. Habent igit͠ duos numeros, maiorē qui fit ex interuallo & uno laterū: hoc est 136. reliquū utiq; qui contineт̃ solidus ab area & uno latere, & in-
πολλάκις sæpè. teruallo iā nūcupato, 4320. Quādo igitur quadratus aliquis, unitatū 36, multiplicatus in 135, & multatus hoc, 4320, quadratū facit: quærimus aūt quadratū maius esse q̄ 36. si ergo statuamus 1 Q † 12 N † 36, & subsequamur antè demonstratā demonstrationē: inueniemus infinitos quadratos qui satisfaciunt quæstioni. quorum unus sit 676. Ponamus igitur triangulum 8 N, 15 N, 17 N. fiunt 60 Q † 8 N æquales 676. Q. & fit 1 N, 77. ad positiones.

6.8.Eucl. XIIX. Inueniendū est triāgulū rectangulū, ut acutis eius angulis in æqualia discissis, numerus angulū secātis sit rationalis. Sit quæ angulū in æquales diuidit partes, 5 N. una aūt sectiò basis 3 N; ergo cathetus erit 4 N. Statuatur ergo basis initio sumta unitatū quotlibet, dummodo triens eius numeri haberi possit. Ac sit 3. Itaq; ergo reliqua sectio basis, 3—3 N. Sed quoniā angulus in duos semisses est sectus, & cathetus ad abscissam partē est sesquitertia: etiā hypotenusa ad reliquū basis erit sesquitertia. & statutū est reliquū segmentum 3—3 N. ergo hypotenusa — 4 † 4 N. Restat ut huius quadratus, nempe 16 Q † 16—32 N æqueт̃ laterū quadratis, uidelicet 16 Q † 9. Fit 1 N, 7. Reliqua sunt euidētia. Et si omnia per 32 reducam: erit sanè cathetus 28, basis 96. hypotenusa 100. & quæ angulum secat, 35.

Emendabile. XIX. Inueniamus triangulū rectāgulū, ut areæ numerus cū hypotenusæ numero faciat quadratū. circūferentia aūt eius, octo cubos. Sit area 1 N. hypotenusa numerus quadratus, priuatus 1 N. & sit 16—1 N. Et cū posuerimus areā 1 N: ergo qui fit ex lateribus circa rectū, fit 2 N. At 2 N cōtineт̃ sub 1 N & 2. Ergo si alterū laterū statuaт̃ 1 N, erit alterū 2. & circūferētia erit 18. is uerò cubus nō est. At n. 18 ort᾽ est è quodā quadrato & unitatib. duabus. Inuēto opus est itaq; aliquo quadrato, qui binario adiecto cubus fiat. Statuaт̃ latus quadrati 1 N † 1. & cubi latus 1 N —1 fit quadratus 1 Q † 2 N † 1. cubus aūt 10 N — 3 Q † 1. Volo aūt cubū quadrato præstare unitatib. 2. ergo quadratus cū binario, hoc est 1 Q † 2 N † 3 æquatur 1 C † 1 N. unde 1 N inueniт̃ 4. Erit ergo latus quadrati, 5. cubi, 3. & quadratus 25, cubus 27. Transmuto itaq; rectangulū, & aream eius pono 1 N, hypotenusam 25—1: manet etiam basis 2, cathetus 1 N. Restat ut hypotenusæ quadratus æquetur quadratis reliquorum laterum. Fit 1 Q † 625 —50, quod æqueт̃ 1 Q † 4. Ergo 1 N est 25 1. ad positiones, & constat.

XX. Inuenire triangulū rectangulū, cuius areæ si hypotenusa addaт̃, fiat cubus. circūferētia aūt quadrato exprimaт̃ numero. Si aūt, perinde ut in præcedēte, areæ constituamus 1 N, hypotenusæ numerū aliquē cubicū — 1 N, eò ueniтur, ut quæstio sit, ecquis cubus binario auctus fiat quadratus. Statuatur cubi latus 1 N — 1. fit cubus 1 C † 3 N † 1—3 Q. erit quadratus lateris 1 N. & fit 1 N, 24 $\frac{1}{4}$. erit ergo latus cubi 17. & ipse proinde erit 4913. Pono rursum aream 1 N, hypotenusam 4913—1 N. sed & basin habemus 2, cathetū 1 N. Et si ęquemus hypotenusę quadratum cū reliquorum quadratis laterum, rationalem depræhendemus numerum.

XXI. Inueniatur rectangulū triangulum, cuius areæ numero lateris numerus adiectus, cōficiat quadratū: & circūferentiæ numerus sit cubus. Statuamus rectangulū ab aliquo numero indefinito impare. sit 2 N † 1. Erit ergo cathetus 2 N † 1. Basis 2 Q † 2 N. hypotenusa 2 Q † 2 N † 1. Restat ut circūferētia sit cubus. & area cū altero laterū faciat quadratū. Fit circūferentia 4 Q † 6 N † 2 Q æqualis cubo. Et est cōpositus numerus. cōtineт̃ enim ab 4 N & 2, & 1 N atq; 1. Si ergo singula latera partiamur per 1 N † 1, habebimus circūferentiā eorū 4 N † 2. sitq; cubus. Restat ut area cū altero laterū, faciat quadratū. Est aūt areæ numerus 2 C † 3 Q † 1 N, sub ratiōe partis 1 Q † 2 † 1. & si faciamus hæc duo ab eadē parte, fiūt 2 C † 10 † 4 N † 1 denominata à parte 2 N † 1. & habemus cōmunem partē 1 Q † 2 N † 1, ita ut duo hæc cōposita faciāt 2 N † 1 æquale quadrato. Quęrebamus aūt etiam 4 N † 2 ęquales cubo. Et res in eo sita est, ut inueniamus cubum quadrati duplum. Est autem 8 respectu 4. Esto 4 N † 2 † 8, & fit 1 N, 1. erit rectangulum 8. 15. 17. & constat.

XXII. Inuenire triāgulū rectāgulū, cuius areę numero si addaт̃ alteri lateris numerus: fiat cubus. sed & circūferētiā cubus numer᾽ notet. Si rursus eodē utamur ductu,

quo

quo in præcedente, id tandem postulabitur, ut 4 N † 2 æquemus quadrato. & 2 N † 1 æquantur 2 C. fit ut quæramus quadratum æquale duobus cubis. sunt 16 & 8. & rursum æquamus 6 † 4 N † 2. & fit Numerus $3\frac{1}{7}$. Erit adhuc rectangulum 13. 63. 65.

XXIII. Inueniatur triãgulũ rectãgulũ, cuius area numero exprimatur quadrato, & si ei adijciatur numerus areæ, fiat quadratus. Fingamus triangulũ ab 1 N † 1. fiet unũ laterũ 2 N, alterũ 1 Q † 1. hypotenusa aũt 1 Q. Imponitur hoc nobis, ut quæramus æqualitatẽ inter 2 Q † 2 N & quadratũ, & 1 C † 2 Q † 1 N equalia cubo. Atq; hoc quidẽ, 2 Q † 2 N, cõficere quadratũ, facile est. Nã si binariũ diuiseris in quadratũ, diuidente binario, inuenies N esse 1. Oportet aũt talẽ inueniri, ut 1 ipsius cubus & semissis, quadratos ab ipsis & ipsam summã faciat cubũ. Est ergo 1 N ex binario diuiso in 1 Q—2. fit cubus, 8. denominatione partis ab 1 Q—2. & duo ab ijs quadrati, fiunt 8, sub ratiõe partis ab 1 Q—2. quadratus. Ipse aũt 2, sub ratione partis 1 Q—2. & omnia habẽt eandẽ partis denominationẽ. fiunt Q Q 2 sub denominata parte ab 1 Q—2, C * & est pars cubica. Esto Q Q æquale 1 C. & omnia ad cubũ, fiunt 2 N æquales. Et si constituamus æqualia unitatibus cubicis, inuenitur 1 N esse cubi alicuius semissis. Esto cubus unitatũ 8. Fit ergo semissis eius 4, quadratus. fit 49. & oportet hinc tollere unitatẽ. quãdoquidẽ alterũ laterũ est 1 Q—1. Et res eò deducitur, ut inueniri opus sit cubũ, ut quadrãs quadrati qui ab eo fit, maior sit q̃ $2\frac{1}{4}$, minor quaternario. Et si ponamus CC, 1. quæremus 4 CC, maiores quidẽ q̃ 2, minores aũt q̃ 4. Ergo cubus maior est q̃ 8, minor aũt q̃ 20. Est aũt 729. Ergo cubus 27 & 27. Statuo itaq; 2 N æquales 27. & fit 1 N, 27. 1 Q, 729. Et si binariũ diuidamus in eum, qui hoc minor est unitate, inueniemus Numerũ esse 512. & habemus in quadrato qui ab eo fit quadrato utiq; unitatẽ.

XXIV. Inueniatur triangulus rectãgulus, cuius areæ numerus sit cubus. & adscito numero areæ, faciat quadratũ. Primùm circũspicere oportet duos datos numeros inuenire triangulũ rectangulũ, ut circũferentia quidẽ æquetur dato numero. Area aũt, alteri. Sint duo numeri, 12 & 7. & imperatũ, quorũ ille circũferentiã, hic aream significet. Ergo quẽ cõponunt multiplicãdo latera rectũ includẽtia, erit 14. esto si constituamus latus * * 1 N, erit alterũ 14 N. At circũferentia est 12. Ergo hypotenusa erit 12—1 N. & quatuor quod est ab eorũ qui ab ipso quadratorũ, fient est 1 Q. 196 Q † 172—24 N. N 336. æquare ijs qui fiunt in circa rectũ angulũ quadratorũ. hoc est uni Q, Quadratis 196. Defectus cõmuniter addatur, & à similibus similia. & omnia ad numeros. fit 170 N, ipse N, 24 Q † 336. Et nõ undequaq; possibile est: nisi dimidiũ Numerorũ in seipsum, detractis Quadratis, in unitates (ductũ) faciat quadratũ. Et sunt numeri quidẽ ex eo qđ fit è circũferentia & quadrilatero qđ est in area. Quadrata aũt in unitates ex eo qđ fit octies à circũferentia in area. Adeò ut huiusmodi dentur numeri. Ac sit sanè numerus areę 1 N. circumferẽtię autem numerus simul & cubus & quadratus: nimirũ 64. Atq; ut cõstituatur triangulũ: oportet quadrati, qui fit à 64, itẽq; 4 Numerorũ semisse capto, inde auferre octuplũ circũferentiæ, usq; ad 1 N. ac, qđ reliquũ est, quęrere equale quadrato. Fiũt 4 Q † 419 || 20304—22576. & omniũ quadrãs. fiunt 1 Q || † 104 76—5624 N equalia quadrato. Porrò aũt & N † 64 equatur quadrato. Et exequentur Numeri, & excessus, & dimẽsio. & reliqua sunt in prõptu.

XXV. Inuenire triangulũ rectangulũ, ut qui fit ab hypotenusa, quadratus sit, aliàs quadrilaterus regularis. & 80. diuisus p unũ laterũ, faciat cubũ & latus. Vnũ latus statuatur 1 N. alterũ 1 Q. & manet q̃ fit ab hypotenusa, ut latere quadrati. Restat ut 1 Q Q. æquemus quadrato. Diuisis omnibus per Q: fit 1 Q † 1 N equalis quadrato, cuius latus sit 1 N—2. Ergo 1 N fit 3. & reliqua sunt manifesta.

XXVI. Inuenire triangulũ rectangulũ, ut unius lateris numerus sit cubicus. alterũ cubus extra latus. hypotenusa aũt cubus & latus. Esto hypotenusa 1 C † 1 N. laterũ alterũ 1 C—1 N. reliquũ ergo latus erit 2 Q. Restat ut 2 Q æquemus 1 C. isq; sit unitas. fit N, 2. Ad posita erit triangulus 6. 8. 10. Et manet.

# DIOPHANTI ALEXANDRINI DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER.

1 SI ab ternario numeri progrediantur, semper unitate, præcedentẽ superãte posteriore,

ſteriore numeri fiunt polygōi ſine multāguli. & tot quiſq; habet angulos, quot cōſtat ipſe unitatibus: latusq; eius eſt proximus ab unitate numerus, puta 2. Eſt autē 3 triangulus, 4 quadrāgulus quadratus, 5 quinquāgulus: & ſic deinceps. Cum aūt de quadratis euidēs ſit, ita eos cōſtitui, qđ naſcātur numeri alicuius in ſeipſum multiplicatione: ꝓbatū eſt, quēuis multāgulū multiplicatū aliquo numero ſecūdū ꝓportionē laterū anguli eius, & adſumentē quadratū quendā 81 iuxta proportionē multitudinis angulorū eius uideri quadratū. Atq; hoc nos demōſtrabimus, oſtēdentes quō dato latere inueniaꝛ qui poſciꝛ multāgulus: & quo pacto dati multāguli latus depræhendatur. Priùs autem ea demonſtrabimus, quæ ad hanc rem ſumuntur.

II. Si tres numeri ſint ꝓgreſſionis arithmeticæ, octuplū cōpoſiti ex maximo in mediū, addito minimi quadrato fit quadratus numerus: cuius latus ęquaꝛ cōpoſito ex maximo, & medij duplo. Sint tres numeri eodē interuallo ſe cōſequētes, a b, b c, c d. Dēmōſtrandū eſt id qđ octies fit ab a b in b c * & rurſum diuiditur quoq; corū bifariā, in eū qui quater ab a b in c b, & in eū qui quater b c quadratū: hoc eſt qui quater à b c quadratus & in eū quidē qui quater ab a c c b, hoc eſt ꝗ quater à b c c d, æqualis fit a c huic c d, cū eo qui à d b, fit quadratus ꝗ ab a b. At b cū qui quater ab a c c b, mixtus uni eorū ꝗ ſunt quater à c b, facit eū ꝗ quater à b c. & quæriꝛ quō quadratus ab a b, & qui quater ab a b b c, & qui quater à b c, cōpoſiti faciant quadratū. Si igitur

2 4 6 8 / AB BC BD 100 ponamus ipſi b c æqualē a e, traijciemus eum ꝗ quater ſub a b b c, in eū ꝗ quater ſub b a a e, ꝗ mixtus ei ꝗ quater à b c, hoc eſt quadrato a e, faciet ęqualē quadruplo eius ꝗ ab b e e a, ꝗ mixtus quadrato ab a b, fit æqualis ei qui à b e e a, ut quadrato ab una deſcripto linea. At b e e a æquanꝛ a b & duobus e a, hoc eſt duob' b c, ꝗ fuit demonſtrandū.

XYLANDRI.

Aequatur cōpoſito.) *Intellige additionē. Numeri 2.4.6. Maximus in mediū 24. eius octuplū 192, cū 4, ut quadrato minimi, fit 196. quadratus lateris 14. ſed duplū quoq; medij, 8, cū maximo 6, tātundē facit. Notandū eſt, idē latus cōfici, ſi ſummā numerorū, interuallo progreſſiōis augeas. Numeri 2.9.16. interuallū 7, ſumma terminorū 27. cū interuallo 34. huius quadratus 1156. Maximus in mediū facit 144. eius octuplū 1152. adde 4, quadratū primi, habes 1156. Porrò bis 9, cū 16, itidē 34 cōſtituūt. Aliud. 5.18.31. Octies 18 ſunt 144. per 31, fiunt 4464. adde 25. quadratū minimi: habes 4489 quadratū, cuius latus 67. Duplum medij 36, addito 31 maximo, tantundem efficit. Iam ſumma omnium 54 interuallum 13, ei additum, 67 conſtat.*

III. Si ſint numeri quotcūq; arithmeticæ progreſſionis: interuallū maximi & minimi eā habēt rationē, ꝗ̄ terminorū numero unitate multato exprimiꝛ. Sint eñ quotcunq; numeri, a b, b c, c d, b e, interuallis æqualibus. demōſtrādū eſt interuallū inter a b & b c, multiplex eſſe interualli a b & b c, numero ꝗ unitate minor ſit ꝗ̄ 4. tot enim ſunt a b, b c, c d, b e. Cùm enim ij ęqualib. interuallis progrediantur: ergo a c, c d, d e, ſunt æquales. ergo e a ad a c multiplex eſt, iuxta numerū terminorū a c, c d, d e. at is unitate minor eſt numero terminorū propoſitorū. ergo etiā e a ad a c multiplex eſt numero unitate minore ꝗ̄ propoſitorū eſt terminorū numerus. Eſt autem a e interuallum maximi & minimi: & a c unicum interuallum.

XYLANDRI.

*Res ita habet. Septē numeri eodē interuallo ſe cōſequētes exēpli gratia ponātur 3.7.11.15.19.23.27. interuallū 4. Inter maximū & minimū, 24, ſeſcuplus ad 4. uñ 1 de 7 (ut terminorū numero) ſublato, manet 6, proportionis index. ſint decem termini, 5.8.11.14.17.20.23.26.29.32. Interuallū 3 nouies (uñ decē ſunt termini) 27. tāto 32 ſuperat minimū 5. Magnus eſt uſus huius theorematis in progreſſionibus arithmeticis tractandis. Verbi gratia. Sunt 581 numeri progreſſionis arithmetica, incremēto 28, quorū minimus 19. quaritur eorū ſumma. Quis neſcit, ultimo opus eſſe, heic maximo, ad ſummā indagandam? & ſequenti theoremate hoc demonſtratur. Sed quanta eſt moleſtia alios adhuc 580 numeros deſcribere, identidem 28 additis, dum ad ultimum peruenias? Nos ita multiplicabimus 28 per 580, fiunt 16240. id adijciemus minimo 19, erit ultimus 16259. Quod ſi ita propoſitū fuiſſet, numeros progreſſionis arithmetica 56 dari, interuallū 15, maximū 857, & quari minimū ac ſummā, 15 p 55 multiplicaſſemus, et ꝓducto 825 de maximo ſublato, minimū reperiſſemus 32. Hoc nimirū eſt magnū ſuperſedere moleſtijs, ijſq; ridiculis: cùm ad ſummā inueniendā ſufficiat extremos & terminorū numerum habere. Proximè ſequentes*

Compēdium progreſſionis arithmeticæ.

quentes

*quentes canonem summæ progreßionis arithmeticæ terminorum concipiendæ demonstrant, de quo alibi actum est.*

IV. Si sint quotcunq; numeri progreßionis arithmeticæ, summa maximi & minimi multiplicata in numerũ terminorũ, duplum summæ omnium terminorum producent numerum. Sint numeri eodem incremento progredientes quotcunq;, puta a, b, c, d, e, f. demonstrandum est summam a f ductam in numerum terminorũ a, b, c, d, e, f, efficere duplum numerum summæ omnium istorum terminorum. Numerus ergo terminorũ aut par erit, aut impar. Esto priore loco par: & quot sunt termini, tot unitatib. constet numerus g h. Diuidatur in duas æquales partes in *k*. & g *k* diuidatur in suas unitates per l, m. Et quoniam quãto maior est f q̃ d, tanto & c q̃ a: ergo simul f a æquabitur iunctis c d. at simul f a ęquatur quòd sub utroq; f a & g l; ergo etiam c d æquatur ijsdẽ. Ob hæc eadem etiã e b æqualis ambob. z a & g *k*. Ergo etiã compositus ex a b c d e f æquatur ei qui sub ambob. f a & g k: at quod sub ambob. f a & g k duplus est qui sub ambobus f a & g h. ergo etiã cõpositi ex a b c d e f duplus est qui sub ambob. f a & g h, hoc est numeri terminorũ a b c d e f. ꝙ fuit demõstrãdũ.

V. His ijsdẽ positis, sint termini a b c d e, numero terminorũ impare, & numerus f g cõstet tot unitatib. quot sunt termini. Eritq; impar. Ponatur in eo unitas ad f h, & g h secetur bifariam in k, diuidaturq; h k in suas unitates in l. Et quoniam quo e superatur ab e, eodem a à c iuncti ergo e a dupli sunt ad c, hoc est ad id quod sub c & c k. Ob eadem scilicet etiam iuncti b d duplus ad id quod sub c & l & h. ergo a e b d dupli sunt eius qui sub c & h k. At g h duplus est ad h k: itaq; etiam a e b d æquales sunt ei qui sub c & h g. Est aũt etiam c æqualis ei qui sub c & h f. itaq; cõpositus ex a b c d e æqualis ei qui sub c & f g. At huius duplus est compositus ex iunctis a e & f g. itaq; etiam coniuncti ex a b c d e duplus erit qui sub ambobus a e & f g, hoc est multitudine expositorum. quod fuit demonstrandum.

VI. Si sint ab unitate quotquot numeri eodẽ interuallo sese cõsequẽtes: summa omniũ multiplicata in octuplũ interualli, si ꝓducto adijciatur quadratus numeri q ab interuallo duab. superatur unitatib. quadratus numerus exsistit: cuius latus binario multatũ, multiplex erit ad interuallũ, totiesq; id cõtinebit, ut si rationis numero unitas adijciatur, numerus fiat duplus ad numerũ terminorũ, unitate etiã in ijs numerata. Sint enim ab unitate numeri eodẽ interuallo progredientes a b c d e f, dico id fieri quod est propositum. Quot enim sint progreßionis termini, cũ unitate, tot unitatib. cõstet numerus g h. Et quoniã interuallũ a b multiplex est iuxta unitate minorẽ ipso g h: si ergo ponamus unũquenq; a c e l g m, habebimus l f ad k b multiplicem, ratione numeri m h. itaq; l f æqualis est ei qui sub k b m e. Et si ponamus duo k g, qui est eorũ interuallum, quæremus an summa multiplicata in g ipsos k b qui est interuallũ ipsorũ, & adscito q fit ab n b, q sit binario minor interuallo, fiat quadratus: cuius latus binario multatũ, numerum exhibeat, qui ad interuallũ ipsorũ k b sit multiplex ratione numeri cõpositi ex ambob. g h h m. Et quoniã summa semißis est eius qui sub ambob. f e, e l, & ipso h g, atq; in eũ qui sub l f g h, & in eũ qui bis sub e l, g h, hoc est duos g h. rursum summa est eius qui sub l f, g h, & duo g h. Atq l f æqualis demõstratus est ei qui sub k b, m h, h g solido, & duo f g. Si ergo mediũ diuidamus m h in o, habebim⁹ summã omniũ æqualẽ ei qui fit ex k b, g h, h o solido, & uni g h. Quęremus itaq; an solidus qui fit ex k b g h h o cũ g h multiplicatus in octo k b, & adiciscens quadratũ ab n b, fiat quadratus. Verũ solidus ex k b g h h o multiplicatus in unũ k b, facit eũ qui sub g h in eũ qui à *k* b quadratũ. Itáq; étiã solidus ex k b g h h o multiplicatus in octo k b, facit eũ qui sub g h h o in octo quadratos à k b, hoc est eũ qui octies sub g h h o in quadratũ à k b, hoc est eum qui quadtuplicatus est sub g h h m in eũ qui à k b quadratũ adsciscens g h in octo k b, & portò quadrátũ ab n b, fit quadratus. Atq g h multiplicatus in octo k b, facit eũ qui octies sub g h h k. ergo uicissim qui quadruplicatus est sub g h h m, in quadratũ à k b, eũ octies eo qui sub g h. k b, qui ab n b quadratus, fit quadratus. Diuiditur aũt qui octies sub g h k b, in quadruplicatum sub g m k b, & in quadruplicatũ sub ambob. iunctis g h h m in quadratum à k b, cũ quadruplicato sub g m k b, & quadruplicatũ sub ambob. g h h m & k b, & qui à n b facit quadratũ. At quadruplicatus sub g m k b æqualis est ei qui bis sub

n k k b, & mixtus ei qui à k b, facit eos qui sunt à k b n b quadratos. Si ergo etiam quadruplicatus sub h g h m in quadratum à *k* g, & quadruplicatus sub ambobus g h h m & *k* b cum quadratis à b *k* *k* g, fit quadratus. Rursus autem quadratus à b *k*, transcendit in quadratum g m ad quadratum * à *k* b, & mixtus hic quadruplicato sub g h h m in quadratum à *k* b. Si ergo qui ab ambobus g h h m in * *k* b quadratum. & quadruplicatus sub ambobus g h h m & *k* b cum * *k* g fit quadratus. Si ponamus ergo ei qui est sub utroq; g h & *k* b æqualem numerũ o. erit etiam * utriusq; g h h m quadratus in quadratum *k* b ipsi * ipsius n o quadrato. quod deinde ostendetur. Si ergo qui in ipsorum o n n *k* quadrati cum quadruplicato qui sub ambobus g h h m & *k* b fit quadratus: quadruplicatus sub g h h m & ipsius *k* b, æqualis quadruplicatus ipsius n o: quandoquidẽ & qui simul ei qui sub ambobus g h h m & *k* b numerus positus est n o. quatuor autem n o æquales ei quod bis sub n o n *k*. binarius enim ponebatur n *k*. Si ergo & qui * ipsorum n o n *k* quadrati, cũ eo quòd bis sub n o n *k* faciunt quadratum, faciunt autem etiam ipsum * huius o *k*, cuius latus o *k* multatũ binario n *k*, numerum n o facit, qui ipsis maior est, ad n b multiplex est ratione eius quod sub ambobus g h h m, qui adscita unitate ipsorum g m est totius expositæ progressionis.

VII. Demonstratio eius, quod dilatum huc fuerat. Sit ambobus g h h m æqualis a. & b æquetur *k* b. ei autem quod sub ambobus g h h m & *k* b, æquetur c. Dico quod etiam * ambororum g h h m, hoc est * ipsius a in * ipsius *k* b, hoc est in * ipsius b, æquatur ei qui à c. Ponatur ipsius a b æqualis in recta, qui sint d e e f, & super eo describatur quadratum d e e l, & compleatur * ut utique. ij autem. sic * ut * sic d o * ergo h * medium proportionale est inter quadratum d h f *k*. ergo quod fit sub d h f *k* quadratis, æquale est *. Et est hoc quidem * quod ab ambobus g h h m. At f *k* quadratum æquale est ei quod à *k* b, huic autem h f * ei g o. & quod ab ambobus iunctis g h h m quadratum ductum in * quadrati *k* b * ipsius n o quadratorum.

### XYLANDRI.

*Hac ut inveni ita retuli, neq; libet oleum & operam perdere. Nunquam autem esse per 4 multiplicari, aliâs ostendimus. Rem tamen exemplis subiectis declaremus. Progressio terminorum (nam iis annumeretur) 5 esto 1. 5. 9. 13. 17. intervallum 4. summa 45. multiplicatur per 32, octuplum scilicet intervalli: fiunt 1440. numerus binario quàm intervallum minor, 2. eius quadratum & 1440, faciunt 1444, qui est quadratus, & latus habet 38. cui si auferas 2, restãt 36, in quo intervallum novies inest. adde 1, fiunt 10, duplum numeri terminorũ. Mira est hac cùm progressionis arithmetica, tum octonarij proprietas. Exploremus etiam in alio exemplo. 1. 8. 15. 22. 29. 36. 43. 50. Intervallum 7, summa 204. multiplicatur per octuplum intervalli, nimirum per 56. fiunt 11424. numeri binario quàm intervallum minoris (is est 5.) quadratus 25 addatur, fit 11449 quadratus lateris 107. aufer 2, restant 105, in quo intervallum pracisè inest quindecies. 1 & 15 sunt 16, duplum numeri terminorum progressionis. sunt enim octo. Habet & aliam octonarius proprietatem, à Plutarcho commemoratam, Platon quæst IV quod quemcunque triangulum numerum octonario multiplices, producto, unitate adscita fit quadratus. cuius rei exemplum subieci.*

Octonarij, triangulorum numerorũ proprietas.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Trigoni.* | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28, | *&c.* | 500500. |
| *octupli.* | 8 | 24 | 48 | 80 | 120 | 168 | 224, | *&c.* | 4004000. |
| *quadrati.* | 9 | 25 | 49 | 81 | 121 | 169 | 225, | *&c.* | 4004001. |
| *latera.* | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15, | *&c.* | 2001. |

*Unum adhuc theorematis Diophãtei exemplum addemus. Sint termini progressionis arithmeticæ, in qua unitas primus numeretur, 89. intervallum 11. Erit ergo ex precedentiũ doctrina maximus 969, & summa omnium 43165. Octuplo intervalli, hoc est per 88 ea multiplicetur, fiunt 3798520, adde 81 (quadratũ de 9, qui binario est numerus quàm intervallũ minor) habes 3798601, quadratum. Duplum numeri terminorum 178. hinc aufer unitatem, supersunt 177. Ac toties oportebit numerum intervalli inesse in numero, quẽ latus dicti quadrati duab. superet uni-*

*peret uni-*

*peret unitatibus. Ergo 177 per 11 multiplica, habes 1947, adde 2, habes 1949 latus quadrati: quod siue hoc in se multiplicando, siue extrahenda è quadrato radice uerum esse deprahendes. Hac de conuersione libuit monere rudiores.*




IIX. Cùm sint quæ proposuimus, pronunciamus: Si quotcunq; numeri ab unitate exponantur in progreſsione arithmetica, ſumma eorum multangulus erit numerus. tot enim habebit angulos, quot unitates numerus interualli binario auctus: latusq; eius erit numerus terminorum, unitate loco termini numerata. Cùm enim oſtenderimus ſummam omnium progreſsionis terminorum multiplicatam in *k* b, octonarium, & adſcito * de n b quadratum facientem * de o *k*. Sed etiam ſi aliam unitatem ponamus a o, habebimus *k* o binarium. & eſt autem etiam ſimiliter etiam *k* n binarius. erũt ergo p b, b *k*, b n ęquali interuallo inuicem ſe excedentes. Ergo g *k* ſub maximo p b, & medio b c ſumens eum qui * minimi b n quadratum facit quadratũ latus habentẽ, compoſitum ex maximo p b, & duobus medijs, qui ſunt b *k*. Ergo etiam p b multiplicabitur in octuplum de *k* b, & adſcito * de n b quadratum æqualis eo qui ſit ab ambobus, cùm p b æquale p b ipſorum *k* b. & latus abiecto binario p k, relinquet triplum de *k* b, qui tripli ſunt ad *k* b, rationem metiente ternario. At ternarius auctus duabus unitatibus, erit unitatis. Cùm ergo ſumma terminorũ progreſsionis aucta unitate idem problema ſoluat p b, isq; ſit oblatus utcunq;, & multangulus erit * * unitas: quoniam unitas eſt a p. At b numerus eſt ipſe a b, & habet latus binariũ. itaq; etiam ſumma totius progreſsionis numerorum, multangulus numerus eſt. tot habens latera, quantus eſt qui binario quidem ipſius p *k* interualli eorum ipſum *k* b, & latus habet ipſum g h, qui eſt numerus terminorum, unitate etiam inter hos cenſa. Et demonſtratum eſt, quod ab Hypſicle in definitione dicitur, Quòd ſi numerorũ ſit ab unitate progreſsio arithmetica quotcũq;: interuallum ſi ponatur unitas, ſummam fore [triangulũ: ſi binarius, quadratũ:] ſi ternarius, quinquangulũ: & angulorum multitudinem exprimi numero, qui interuallum binario excedat: latus aũt eſſe numerum terminorum, nõ excluſa ex horum cenſu unitate. Itaq; quando trianguli * maiores exſiſtente interuallo fiunt, & latera ipſorum fiunt maximi expoſitorũ: & eius qui ſub maximo expoſitorum, & qui unitate eum excedat, dupli ſunt ad triangulum ſignificatũ. Et quoniã i b cùm ſit tot anguli quot in ipſo ſunt unitates, multiplicatus in g, eius minoris binario quàm eſt interuallũ, hoc eſt in g. erit ipſum *k* b * accipient quadrato q̃ ipſe eſt minorem, hoc eſt eum * ipſius n b facit quadratũ. Ea erit definitio multãgulorũ, Quiuis triangulus multiplicatus per f binario minoris multitudine angulorum, & adſumẽs eum qui * quaternario minoris multitudine triũ, facit quaternariũ. Simul ergo demonſtrata Hypſiclis definitione, & horum multangulorũ: reliquum eſt ut demonſtremus, quo pacto ubi latus datur, is etiam multangulus, qui requiritur, inueniri poſsit. Habentes enim latus dati alicuius multanguli g h, & numerum angulorũ eius, habemus etiam *k* b datorũ. ac proinde etiã qui ſub ambobus, qui ſunt g h m & *k* b habebimus datũ, qui æqualis eſt ipſi o. itaq; habebimus etiam *k* o datũ, quando binarius eſt n *k*. itaq; etiam * ipſum *k* f habebimus datum. & ſi hinc ſubtrahamus ipſum * ipſius n b, qui eſt quadratus: habebimus etiam reliquũ datũ: q quęſiti multãguli eſt multiplex, ratione octupla ipſius *k* b. Ergo inueniri poteſt multangulus qui quęritur. Similiter etiã dato multangulo, inueniemus latus eius, ipſum g h. quod fuit demonſtrandum.

IX. Ad docendũ accommodatiùs aũt oſtendemus hoc ijs, qui promtè uolũt audire ea, quæ quęrũtur per methodos. Latus enim multanguli acceptũ ſemper geminabimus: hinc auferemus unitatem, & reliquũ multiplicabimus per numerũ qui binario abſit, minor ſcilicet, à numero multitudinis ipſo quadrato. ac qui fit, ei ſem- *
per ad-

per addemus binariū, quadratumq́; eius quod sic fit sumentes, ab eo subtrahemus quadratum eius, qui quaternio minor est quàm multitudo trium. reliquumq́; diuidemus in octuplū eius qui binario est minor, itaq́; inueniemus quęsitum multangulum. Rursus aūt ipso dato multangulo, latus sic inueniemus. Multiplicabimus eum per numerum qui octuplus sit ad numerum binario minorem eo numero, qui multitudinem angulorum opprimit. Ei qui sic fit, addemus quadratum, qui fit à numero quatuor unitatib. minore, quàm est numerus angulorum. & inueniemus quadratū, si tamen datus, sit multangulus. de huius autem quadrati latere semper auferemus biuarium, reliquum diuidemus in eum, qui binario minus habet quàm angulorum numerus inde orto unitatem addemus, summęq́; semissem arripiētes, *latus* quæsiti multanguli habebimus.

X. Dato numero, inueniendum est quot modis multangulus fieri possit. Sit datus numerus a b. multitudo angulorum b c. & ponatur in b c binarius quidem c d, quaternarius aūt c e Et quoniam a b, qui est multangulus, totidem habet angulos, quantus est b c. qui ergo g *k* sub a b b d, cum * b e facit quadratum. Sit eius latus f g. adeoq́; * ipsius f g quadratus: æqualis eiq́; f g sub a b b d, & el qui à b e quadrato. Ponatur in ipso a b unitas a *k*. & diuisus est g *k* sub a b b d in eum qui d g sub a h b d. & in * sub ambobus a b h d * qui d g. & traijciemus ipsum * sub utroq; qui sunt a b h & qui b d in eum qui sub *k* b. Quadruplicatum aūt ab a h b d in eum qui bis sub b a d e. Binarius enim est e d, & à f g. Ergo quadrato æqualis est, ei qui sub *k* d b, & ei q bis b d d e, & quadrato à b e. Verùm ipsi bis à b d e quadrato, & ei qui à b e, æqualis est qui in b d d quadratus. ergo & qui in f g quadratus, æqualis & ei qui sub *k* b d. & quadrato à d e. Et quoniam a e æqualis cum esset quadruplicatus, utriq; simul a *b* &
* b e, maior est d ipsius a h, hoc est quaternario ens d g * binarius. Restat c *k* maior binario quàm e d f. ergo semissis ipsius d *k* incidet inter c *k*. Esto l. & traijciemus cū qui sub *k* b b d, in eum qui est ipsorum * b l l d excessus. quandoquidem g d *k* per l est in semisses diuisa. adiecta autem est a b. & est eius quod à *k* b d cum eo quod est à d l æquale ei quod est ab l b. & ipsum * l b igitur ipso l d maius est eo, qđ sub *k* b d. Proinde quadratus etiam ab f g, æquabitur & interuallo * ipsorum b l l d, & ipsi * autem quadrato adijciatur * d l. & ij * ipsorum f g d l. ergo æquales quadrati sunt quadratis ab b l l e. Quòd si duo numeri unus etiā duobus numeris quadratis sint: etiam uice uersa excessus eorum æquales. Interuallum ergo istorum * l d d e, ęqualis interuallo l b f g. Et quoniam e d æqualis est d c, adijcitur autem c d. ergo e c l cū * c d æquatur * a l. illa ergo eorum * eorum l d d c intercapedo, hoc est quæ ab ipsis l d d e, quæ est sub e l g, æqualis el quæ est l b f g intercapedini. Ponatur ipsi b l æqualis f m. maior enim est b l quàm f g. Quando ostensum est quadrata quæ sunt sub f g d l ęqualia esse ijs quæ à b l e d quadratis: reliquū est, ut quod à b l, maius sit quàm quod à d e: cum etiam eo maius sit, quod fit à d e. itaq; & à b l maius erit, *quā* ab f g. Ponatur itaq; huic b l ille f m. Erit ergo etiam excessus eorum quæ ab f m f g, æqualis ijs quæ sub e l l c. Et quoniam ille d *k* quadruplus est ad utrunq; istorum a b b h. at d *k* sectus est in semisses in l. ergo & d l duplus erit amborum iunctim, a *b b h.* quorum d e duplus est ad a h. Reliquus ergo l b duplus est ad duo b h. Quadruplus ergo est e l ad h b. ergo prima pars ipsius l e est h b. Sed & unitas a h quadrupla est ad e c quaternionem. totus ergo a b, quadrans est ex e l. Demonstratum est aūt, etiam h b quadrantem esse ex l c. igitur quod est sub a b b h, decimasexta pars est eius, qđ sub e l l c. hoc ergo sedecuplum est ad id, quod sub a b b h. Demonstratum uerò etiam est quod sub e l l c est, æquale esse ipsorum * m f f g interuallo. Ergo quod sedecies sub a b b h, æquatur interuallo quadratorum à f g, & g m. hoc est ei quod ab m g, & bis eo quod sub f g, g m. Ergo sedecuplus eius quod est sub a b b h, æquatur ei quod est à g m, & duplo eius quod sub f g, g m. par est ergo g m. secetur in æquales partes, ad b.



FINIS DIOPHANTEORVM.

